‘OMAR AL-KHAYYĀM
Vie œuvres et algèbre

Par Nicolas Farès : nfares55@hotmail.com
(3-1-2018)
Équipe d’Études et de Recherches sur la Tradition Scientifique Arabe
Société Libanaise d’Histoire des Sciences Arabes

La présente étude se base sur le chapitre V du livre de l’auteur intitulé : *Naissance et développement de l’algèbre dans la tradition mathématique arabe*, Dār al-Fārābī, 20017, Beyrouth.

1. Vie, culture et œuvre d’al-Khayyām.
1. 1. Sa vie.

Le mathématicien et philosophe Omar al-Khayyām (ou al-Khayyāmī) est né à Nayshābūr, dans le nord-est de l’Iran en 440^{H}/1048 et mort en 526^{H}/1131 dans sa ville natale.

Les informations concernant les dates de sa naissance et de sa mort sont sûres ainsi que celles concernant les titres de ses ouvrages. Ces titres montrent qu’il était un mathématicien et philosophe distingué qui avait, en plus, des compétences en astronomie. On est sûr aussi du fait qu’il était un des astronomes du Sultan seldjoukide Malikshāh qui a gouverné entre 465^{H}/1072 et 485^{H}/1092 [Rashed et Vahabzadeh, 1999, pp. 3-6]. Les informations sûres concernant la vie d’al-Khayyām restent pourtant rares, au moins si on les compare aux récits divers et nombreux non documentés ou même légendaires qui la concernent[1].

Evoquer le nom d’al-Khayyām conduit spontanément à penser au poète persan auteur des *Rubā'iyyāt*, mais il n’existe pas de documents fiables qui confirment l’identification de ces deux génies, bien que le biographe Ibn al-Qifṭī (568^{H}/1172-646^{H}/1248) ait écrit que le mathématicien et philosophe Omar al-Khayyām avait composé des poèmes. En revanche, il n'existe pas d'arguments sûrs qui

[1] Un des plus beaux romans dont il est le héros est sans doute le *Samarcande* d’Amin Maalouf, édité à plusieurs reprises.

permettent d'affirmer que le poète et le mathématicien sont deux personnes différentes, homonymes.

F. Wœpcke reproduit et traduit en français la totalité du fragment qui lui a été consacré par cet ancien biographe suivi de quatre vers [2]. Voici la traduction -faite par F. Wœpcke- de ce fragment : « *Omar al-Khayyām, imām du Khorāçān, le grand savant du temps, était versé dans les sciences des Grecs. Il exhortait à chercher le Dieu unique, gouverneur du monde, par la purification des mouvements corporels, de manière à rendre l'âme humaine exempte de toute impureté. Il recommandait aussi une étude persévérante de la politique, fondée sur les bases de cette science établies par les philosophes grecs. Les Soûfis des temps postérieurs ont accueilli le sens apparent d'une partie de ses poésies, et puis les ont accommodées a leurs doctrines, de sorte qu'ils en font l'objet de discussions dans leurs assemblées et dans leurs réunions privées. Mais le sens caché de ses poésies *consiste en axiomes de la religion universelle, et en principes généraux embrassant les devoirs pratiques*[3]. Comme les hommes de son temps blâmaient ses opinions religieuses, et mettaient à découvert ce qu'il cachait en secret, il craignit pour sa vie, et mit un frein aux écarts de sa langue et de sa plume. Il fit le pèlerinage, grâce plutôt à une rencontre fortuite que par piété[4]; et son extérieur trahit ses pensées secrètes, bien que rien n'en parût dans ses paroles. Lorsqu'il fut arrivé a Bagdâd, les personnes qui s'étaient livrées aux mêmes études que lui en fait de sciences anciennes accoururent auprès de lui; mais il leur ferma sa porte, en homme qui avait renoncé à ces études, et non pas en homme qui fut resté leur confrère. Après être retourné de son pèlerinage dans (à) son pays, il se rendait au lieu des prières le soir et le matin, et cachait ses secrets, qui pourtant ne pouvaient pas manquer de se*

[2] [Wœpcke, 1851, p. 52 de la partie arabe pour le texte, et pp. v-vi, pour sa traduction en français].

[3] Le passage mis entre deux astérisques est la traduction par F. Wœpcke d'un passage en arabe qui signifie plutôt : « consiste en des serpents qui mordent la loi de la religion (*al charī'a*) et des propos qui provoquent la haine ».

[4] Lire au lieu de ce passage: « pour sauver les apparences plutôt que par piété ».

révéler. Il était sans pareil dans l'astronomie et dans la philosophie; et sa capacité éminente dans ces sciences aurait passé en proverbe, s'il avait reçu en partage le respect des convenances. On a de lui des poésies légères dont le sens caché perce à travers leurs expressions voilées, et dans lesquelles la veine de la conception poétique est troublée par l'impureté de l'intention cachée. Poésie :

« Comme mon âme se contente d'une aisance modeste et facile à obtenir, que toutefois ma main et mon bras ne me procurent qu'avec effort,

« je suis à l'abri de toutes les vicissitudes de la fortune et, dans mes malheurs, ma main et les projets que je forme sont mon refuge.

« Les sphères dans leur mouvement n'ont-elles pas prononcé l'arrêt, que toutes les étoiles heureuses finissent par décliner vers une position funeste.

« Persévérance donc ô mon âme, dans ton repos! Tu en fais seulement crouler le sommet, en voulant en consolider les bases ».

Ce récit qui montre al-Khayyām sous l'aspect d'un hypocrite et d'un sacrilège est contredit par celui de l'un de ses contemporains, al-Bayhaqī, qui le présente comme un mathématicien philosophe digne et sage. [Rashed et Vahabzadeh, 1999, p. 6],

Un deuxième récit, donné par un écrivain (mort presque deux siècles après al-Khayyām), Rashīd al-Dīn al-Hamadhānī, auteur du fameux livre *Jāmi' al-Tawārīkh*, fait d'al-Khayyām un contemporain et ami de Hasan al-Sabbāḥ[5], fondateur de la secte des Assassins. R. Rashed remarque que si ce récit est crédible « *il faudrait supposer qu'al-Khayyām aurait vécu cent-vingt ans, ce qui n'aurait échappé à personne* ».

1. 2. Sa culture.

On ne connait pas l'identité du (ou des) professeur (s) d'al-Khayyām en mathématiques. Mais, d'après ses propres écrits, il est certain qu'il avait une bonne connaissance des recherches avancées de ses prédécesseurs directs. En effet, il connaissait en détails les

[5] F. Wœpcke [pp.v-vi] s'est appuyé sur ce récit ; il en est de même, probablement, pour A. Maalouf.

travaux d'Abū al-Jūd. De plus, il évoque un traité d'Ibn al-Haytham, dans lequel ce dernier résout un problème solide non résoluble par intersection de coniques[6], et il cite un nombre de mathématiciens autres que ces deux derniers, dont al-Māhānī, al-Sāghānī, al-Būzjānī, al- Qūhī, al-Khāzin et Ibn ʿIrāq[7]. La compréhension des travaux de mathématiciens de ce rang demandait une culture bien solide en mathématique grecque et notamment en géométrie. D'ailleurs, lui-même écrit dans l'introduction de son traité algébrique : « *Il faut bien savoir que ce traité ne sera compris que de ceux qui maîtrisent le livre d'Euclide sur les* Éléments *et son livre sur les* Données, *ainsi que deux livres de l'ouvrage d'Apollonius sur les* Coniques. *Celui à qui la connaissance de l'un de ces trois livres fait défaut ne peut avoir accès à la compréhension de ce traité. Je me suis appliqué avec peine, à ne renvoyer dans ce traité qu'à ces trois livres* ». En parlant des grandeurs continues il dit : *« Les grandeurs sont les quantités continues, qui sont quatre : la ligne, la surface, le solide et le temps, comme on le trouve exposé d'une manière globale dans les* Catégories, *et d'une manière plus détaillée dans la* Philosophie Première[8]. *Certains considèrent que le lieu est une espèce subdivisant la surface sous le genre du continue; mais une connaissance exacte ruine cette opinion* ... ». Notons aussi qu'al-Khayyām cite aussi l'Almageste en évoquant le sujet du calcul approché. [Rashed et Vahabzadeh, 1999, pp. 120, 122 et 266].

En ce qui concerne sa formation en philosophie, nous possédons bien plus d'informations : « *Al-Khayyām lui-même se place dans la tradition avicennienne. Dans l'un de ses écrits, il parle en effet de « mon maître, le plus grand des modernes, al-Shaykh al-Ra'īs, Abū al-Hasan ibn 'Abd Allah ibn Sīnā* ». R. Rashed remarque que, « *même si on ne prend pas l'expression à la lettre, on sait par un autre*

---

[6] Il s'agit de trouver quatre lignes entre deux lignes de sorte que ces six lignes se succèdent en proportion. R. Rashed affirme que ce traité est toujours introuvable.
[7] Voir [Farès, 2017, pp. 197-201], [Rashed, 1999, pp. 116-118 et 226-228], ou [Wœpcke, 1851, pp. 1-2].
[8] La *Métaphysique*.

témoignage historique, que c'est Bahmanyār, l'élève direct d'Avicenne qui fût le maître d'al-Khayyām » ; à l'appui, il cite un extrait du livre du biographe al-Safaḍī [Rashed et Vahabzadeh, 1999, p. 4].

1. 3. Son œuvre.

Les anciens bio-bibliographes ne donnent pas de liste des travaux d'al-Khayyām, ce qui rend impossible de connaître avec précision les titres de tous ses ouvrages et n'aide pas à trancher la question de savoir si le poète et le mathématicien étaient la même personne. La liste des 13 écrits que nous allons donner dans la suite est empruntée au livre de R. Rashed et Wahabzadeh susmentionné ; nous y ajoutons les quelques commentaires concernant les écrits mathématiques. Ceux-ci sont au nombre de 4, dont seuls les trois premiers ont survécu jusqu'à nos jours.

1) *Traité sur la division du quart du cercle*. Al-Khayyām y résout un problème géométrique en le transformant en une équation quadrinôme du troisième degré, qu'il résout moyennant l'intersection d'une hyperbole et d'un cercle. Ce traité est important du point de vue de l'histoire. En effet, al-Khayyām y donne un aperçu des dernières recherches de son époque, concernant les problèmes géométriques « solides ». De plus, il y expose son projet algébrique, à savoir la résolution de tous les types d'équations de degré ≤ 3(qu'il énumère), et promet de réaliser ce projet dans un traité indépendant[9]. Le traité évoque, de surcroît, certaines questions concernant la philosophie des mathématiques (les fondements de l'algèbre et la relation entre cette discipline et la géométrie[10]). Sa lecture donne une bonne idée de la rédaction mathématique et des méthodes d'analyse et de synthèse à cette époque.

2) *Un article sur l'algèbre et al-muqābala* (« *maqāla fī al-jabr wa al-muqābala* »). Il s'agit de son traité principal en algèbre, dont il a

[9] Son traité principal en algèbre :« *maqāla fī al-jabr wa al-muqābala* » (que nous exposerons plus bas).

[10] Voir [Farès, 2017, pp. 202], ou [Rashed, 1999, pp. 249-251].

promis la rédaction dans le traité précédent. Il sera notre principale référence dans la suite de notre présent exposé.
3) *Commentaire sur des problèmes posés par certains postulats de l'ouvrage d'Euclide*. Ce traité discute des questions relevant des fondements des mathématiques. Il contient trois articles qu'on peut classer en deux chapitres :
- le premier chapitre vise à « démontrer » le cinquième postulat d'Euclide. Une telle tentative était un projet qui avait occupé de nombreux grands mathématiciens durant plus de vingt siècles. Les recherches dans ce domaine ont abouti à la naissance des géométries non euclidiennes au XIX^{e} siècle de notre ère,
- le deuxième chapitre contient deux articles sur la théorie des proportions, dans lesquels al-Khayyām souligne certaines difficultés dans les définitions euclidiennes données aux Livres V et VI des *Éléments*. La lecture de ce traité, notamment celle du deuxième chapitre, est d'un grand intérêt pour les chercheurs en philosophie des mathématiques.
4) Le quatrième travail mathématique d'al-Khayyām est son livre sur l'extraction de la racine nième d'un nombre. C'est lui-même qui cite ce livre dans son traité algébrique, où il affirme que les résultats auxquels il arrive dans ce domaine sont sans précédent: « *Les Indiens possèdent des méthodes pour extraire les côtés des carrés et des cubes reposant sur une induction fondée sur peu de nombres ; c'est-à dire la connaissance des carrés des neuf chiffres … ainsi que des produits de l'un par l'autre … Nous avons fait un livre pour démontrer que ces méthodes sont exactes et qu'elles mènent à l'objet cherché. Nous en avons, en outre, multiplié les formes, je veux dire pour déterminer les côtés du carré-carré, du carré-cube, du cubo-cube, et ceci aussi loin que l'on veut, ce en quoi personne ne nous avait précédé* » [Rashed et Whahabzadeh, pp. 128-130].

Parmi les autres écrits scientifiques d'al-Khayyām. il y a :
5) Le *zīj de Malikshāh*, 6) *L'art de la balance de la sagesse*, 7) *Nurūz-nameh* (Le livre du Nirūz, 8) *Commentaire sur la difficulté de l'ouvrage sur la musique*.

Parmi ses écrits philosophiques :

9) *Sur la génération et l'obligation* (*Fī al-kawn wa al-taklīf*), 10) *Un complément au texte précédent*, 11) *Un premier traité sur l'être,* appelé par son éditeur « *L'illumination intellectuelle au sujet de la science universelle* », 12) *Un traité sur l'être,* 13) *Un traité en persan sur L'universalité de l'être*.

2. Développement de l'algèbre par la géométrie avant al-Khayyām.

L'algèbre, tout comme les autres disciplines et théories mathématiques nées avant le XIX^{e} siècle, n'a pas possédé, lors de sa naissance (au 1er tiers du IX^{e} s. avec al-Khwārizmī)[11], son propre système axiomatique suffisant pour permettre de démontrer algébriquement les propositions algébriques. Afin d'étayer leurs « démonstrations » en algèbre, les successeurs direct d'al-Khwārizmī ont, eux aussi, eu recours à l'arithmétique et à la géométrie. Chacune de ces deux disciplines étaient, en effet, dotée d'un système axiomatique assez solide, depuis Euclide dont les *Éléments* ont été traduits en arabe du temps d'al-Khwārizmī. Il était donc naturel que le développement de l'algèbre se soit réalisé dans deux directions : l'une marquée par l'influence de la géométrie, l'autre par celle de l'arithmétique. Ces deux directions ont pris corps dans deux courants de recherche algébrique : « le courant géométrique » et « le courant arithmétique » [12] . Le premier a développé l'algèbre « par la

[11] Voir [Farès, 2015] ou [Rashed, 2007].

[12] À notre connaissance, la distinction explicite de ces deux courants, l'un de l'autre, est apparue pour la première fois dans les travaux de R. Rashed en histoire de l'algèbre. Voir la bibliographie: [Rashed, 1997, vol. 2, ch. 2]. L'auteur avait d'ailleurs consacré deux livres dans lesquels il étudie ces deux courants : [Rashed, 1984] pour le *courant arithmétique* et [Rashed, 1986] pour le *courant géométrique*. Cette distinction n'était pas possible explicitement avant l'accumulation, dans les dernières décennies du XX^{e} siècle, d'une quantité suffisante de recherches et de connaissances sur les textes algébriques écrits en arabe dans la période située entre le IX^{e} et le XIII^{e} siècle. A. P. Youschkévitch avait déjà souligné « *une tendance à l'arithmétisation* » chez abū Kāmil dans son traitement du calcul algébrique [Youschkévitch, 1976, p. 56]. De sa part, A. Anbouba avait parlé « *du courant*

géométrie » tout en développant la géométrie « par l'algèbre » ; le second courant de recherche a développé l'algèbre en invoquant l'arithmétique. Dans la suite de ce paragraphe, nous ne nous intéresserons que du premier courant.

Les raisonnements géométriques d'al-Khwārizmī et de ses contemporains et successeurs directs (Ibn Turk, Thābit ibn Qurra, Abū Kāmil) se sont basés sur la représentation géométrique des grandeurs algébriques (en considérant x comme un segment de droite, x^2 comme un carré de côté x, $b.x$ comme un rectangle de côtés b et x, …). Cette représentation les a aidés à traduire les problèmes (et les calculs algébriques) du 2^e^ degré en des problèmes géométriques sur les longueurs et les surfaces dans le plan. Elle leur a permis de justifier géométriquement les algorithmes de résolution des types d'équations du second degré et certaines règles de calcul algébriques. D'un autre côté, cette représentation leur a été utile pour transformer des problèmes géométriques sur les longueurs et les surfaces en des équations algébriques du 2^e^ degré donc de les résoudre par l'algèbre.

Ultérieurement, à partir de la 2^e^ moitié du IX^e^ siècle, les successeurs d'al-Khwārizmī étaient en mesure de lire toutes les mathématiques grecques à la lumière de l'algèbre; un grand nombre parmi eux l'ont fait, ce qui a constitué un courant de recherche mathématique très actif, qui a nourri une traduction dans le sens inverse: de la géométrie vers l'algèbre. Ces lectures algébriques marquent le début de la maturité de l'algèbre et de son intervention en géométrie, pour contribuer, à son tour, à l'évolution de cette discipline. Elles ont, en effet, permis d'exprimer des problèmes géométriques difficiles en termes de relations algébriques. Il n'y a pas lieu ici de rappeler l'importance des lectures algébriques des *Éléments* d'Euclide et notamment celles du Livre X qui ont transformé la théorie des irrationnels et constitué un domaine important d'exercice

---

d'algèbre géométrique qui concurrence l'algèbre numérique » [Anbouba, 1978, p. 82].

de l'algèbre[13]. On doit, pourtant, souligner celles qui concernent *les Coniques* d'Apollonius (II^e s. av. J-C) traduites en arabe depuis le IX^e siècle ; elles ont, en effet, engendré un autre type d'intervention de l'algèbre dans la géométrie, ainsi qu'un autre type de raisonnement géométrique en algèbre : cette fois, les solutions d'une équation algébrique sont données géométriquement, sans passer par la traduction géométrique de l'équation (c.à.d. sans représenter x^2, x^3 respectivement par des carrés et des cubes), mais en utilisant les propriétés de certaines courbes géométriques. C'était l'aboutissement d'une longue activité de recherche au cours de laquelle on a traité certains problèmes "solides"[14] hérités de la tradition mathématique grecque et d'autres problèmes, posés par la recherche en mathématique[15], ou en d'autres domaines[16]. Les géomètres avaient résolu de tels problèmes, géométriquement, en utilisant une technique héritée de leurs prédécesseurs grecs, celle de l'intersection des

---

[13] On trouve des exemples sur les lectures Les lectures algébriques des Livres II, V, dans [Farès, 2017, §1, ch. II]. Sur les lectures algébriques du Livre X, voir [Ben Miled, 2005], [Rashed, 1997, ch.2], [Farès, 2009] et [Farès, 2016].

[14] On appelait "*solides*" les problèmes géométriques non résolubles au moyen de la règle et du compas, comme "*la duplication du cube*" (qui se ramène au problème "des deux *moyennes*"), "*la trisection de l'angle*" et la construction de l'heptagone et certains autres polygones réguliers, …

[15] Comme "*le problème d'Archimède*", posé dans la prop. II. 4 de son « *De la sphère et du cylindre* » : "*déterminer la section d'une sphère par un plan de telle sorte que les volumes des deux parties de la sphère ainsi déterminées soient dans un rapport donné*", transformé par al-Māhānī (… -880) en une équation cubique de la forme $x^3 + r = px^2$ qui, depuis, porte le nom de ce mathématicien arabe (cf. Cajori. F, *History of mathematics*, Londres, 1896). D'après al-Khayyām, cette équation n'a été résolue qu'avec al-Khāzin (X^e s.), par intersection de coniques, voir [Rashed 1997, vol. 2, pp. 35-36 et 1999, p.117].

[16] Comme "le problème d'Ibn al-Haytham" ("*Problème d'al-Hazen*"): "*Etant donnés un cercle C et deux point P_1 et P_2, dans le même plan; trouver un point A de C, de telle sorte que le rayon lumineux partant du point P_1 et passant par A se réfléchit pour passer par P_2*". Ce problème posé et résolu par Ibn al-Haytham au moyen de l'intersection d'une hyperbole et d'un cercle, se ramène à un problème de résolution d'une équation du 4e degré.

sections coniques. Les algébristes ont traité ces problèmes en les traduisant en des équations algébriques de degrés supérieurs à 2 (naturellement) et souvent de degré 3. À cette époque, le niveau du développement du calcul algébrique était loin d'offrir les moyens de résoudre algébriquement ces équations. Alors on avait procédé à leur résolution par intersection de coniques. C'est dans ce contexte que l'on avait traduit les propriétés géométriques caractérisant les coniques en des relations équivalentes à leurs équations algébriques par rapport à des systèmes de coordonnées divers.

Ce mouvement de recherche avait constitué un pas important aussi bien dans l'évolution de l'algèbre que dans l'enrichissement de la théorie d'Apollonius. On assiste ainsi, dans le traitement du même problème, à une traduction dans les deux directions : de la géométrie vers l'algèbre et inversement. La traduction algébrique du problème géométrique le transforme en une équation algébrique du 3^{e} degré ; ensuite, pour résoudre cette équation, l'algébriste la transforme en une égalité entre deux expressions algébriques dont chacune exprime l'équation d'une courbe géométrique (conique). La résolution de l'équation résulte alors de l'intersection de ces deux courbes. Cette interaction dialectique (algèbre-géométrie) marque le commencement d'une branche nouvelle des mathématiques appelée de nos jours « la géométrie algébrique »[17]. L'objet de celle-ci est la résolution des équations algébriques par l'intersection de courbes géométriques d'une part et, d'autre part, par la reconnaissance des courbes non pas seulement à travers leurs formes géométriques mais aussi, à travers des relations algébriques.

3. Études sur l'algèbre d'al-Khayyām.

La naissance de la géométrie algébrique a été, pendant une longue durée, attribuée aux travaux du philosophe et mathématicien français René Descartes (1596-1650). On a continué à considérer Descartes comme étant le premier mathématicien de l'histoire à avoir

[17] Cf. [Houzel, 2002].

développé algébriquement la théorie (géométrique) des sections coniques, introduite par Apollonius (3^e-2^e s. av. J.-C.) et à avoir déterminé les courbes géométriques par des équations algébriques. Mais ces considérations ont été modifiées dans la deuxième moitié du XIX^e siècle, à la suite de la publication par l'historien des sciences Franz Wœpcke, en 1851, de son livre *L'algèbre d'Omar al-Khayyāmī* [Wœpcke, 1851]. Dans ce livre, l'auteur publie le traité algébrique d'Omar al-Khayyām, « *maqāla fī al-jabr wa al-muqābala*» (*article en algèbre*), l'édite en se basant sur trois manuscrits ; il accompagne cette édition d'une traduction française du traité et d'un commentaire historique et mathématique ; il fait suivre ce travail d'une annexe, importante du point de vue de l'histoire des mathématiques, dans laquelle il évoque des travaux de certains mathématiciens de la tradition arabe qui ont précédé al-Khayyām et qui sont cités (parmi d'autres) par celui-ci dans son traité algébrique.

Cette étude de F. Wœpcke a montré que les travaux du savant français Descartes, qui ont révolutionné les mathématiques au XVII^e siècle, trouvent effectivement leur début dans l'algèbre d'al-Khayyām au début du XII^e siècle. C'est que F. Wœpcke a montré, pour la première fois dans l'histoire que la longue période située entre Apollonius (ou la science grecque en général) et Descartes n'était pas vide et qu'elle contenait une longue liste de noms de grands savants de la tradition mathématique arabe. Parmi ces noms, Wœpcke cite ceux de : Abū Abdellah al Māhānī et Thābit Ibn Qurra (IX^e s.), Abū al-Hasan al-Shamsī al-Harawī et Abū Hāmid al-Sāghānī (X^e s.), Abū Sahl al-Qūhī (X^e-XI^e s.), Abū al-Jūd Ibn al-Layth, Abū al-Hasan Ibn al-Haytham, Abū al-Rayhan al-Bīrūnī et Ahmad Ibn Abdel-Jalīl al-Sijzī (XI^e s.). Ces noms (à l'exception d'al-Harawī et d'al-Sijzī) sont cités par al-Khayyām qui leur ajoute ceux d'Abū al-Wafā' al-Būzjānī, Abū Jaʿfar al-Khāzin (X^e s.) et Abū Nasr Ibn ʿIrāq (XI^e s.). Les recherches menées par ces scientifiques pour résoudre certains problèmes "solides" (dont ceux hérités de la tradition mathématique grecque) les avaient conduits à utiliser la technique d'intersection des coniques. Plusieurs d'entre eux avaient eu recours à l'algèbre et transformé quelques uns de ces problèmes en des équations algébriques du troisième degré ; ils avaient commencé à résoudre ces équations au moyen des coniques en traduisant algébriquement les propriétés de ces courbes.

Pour attirer l'attention sur ce genre d'activités, F. Wœocke, présente à la fin de son livre, après son étude du traité algébrique d'al-Khayyām, l'annexe susmentionnée, qui contient cinq « *additions* ». Dans chacune de ces additions il traduit en français, commente et étudie un fragment d'un manuscrit mathématique arabe ancien [Wœpcke, 1851, pp. 91-126].

Le livre de Wœpcke attira l'attention des historiens des sciences sur les travaux scientifiques d'al-Khayyām. Les éditions, traductions (en diverses langues) et études les concernant, se sont succédé à partir du premier tiers du XX^e siècle[18]. En 1961, B. A. Rosenfeld et A. P. Youschkévitch leur ont consacré un grand volume publié en russe. Le livre de ce dernier sur les mathématiques arabes, [Youschkévitch, 1976] consacre plusieurs paragraphes aux travaux mathématiques d'al-Khayyām.

En 1981, les deux chercheurs R. Rashed et A. Djebbar ont publié un ouvrage sur l'algèbre d'al-Khayyām, dans lequel ils ont repris son traité susmentionné « *maqāla fī al-jabr wa al-muqābla*», qui a été édité et étudié par Wœpcke. Ils ont procédé à une édition critique de ce traité, basée sur six manuscrits et sur une connaissance plus vaste de l'histoire des textes et de la langue arabe. Leur livre contient aussi l'édition d'un autre traité d'al-Khayyām intitulé « *Sur la division du quart du cercle* », ainsi qu'une traduction en français et un commentaire historique et mathématique de chacun des deux traités [Rashed et Djebbar, 1981].

En 1999, R. Rashed et Bijan Vahabzadeh ont publié en français, un ouvrage portant le titre *Al-Khayyām mathématicien*, dans lequel ils ont réédité et étudié les deux traités du livre précédent[19]. En plus, ils

[18] Pour plus de détails sur ces publications, voir [Rashed et Vahabzadeh, 1999, pp. 112-114] et [Vahabzadeh, 2014].

[19] (*i. e.* de [Rashed et Djebbar, 1981]). Seulement le commentaire de la résolution des équations de degrés ≤ 2 n'y est pas reproduit.

ont ajouté une édition, une étude et un commentaire du livre d'al-Khayyām intitulé : « *Commentaire sur les difficultés de certains postulats de l'ouvrage d'Euclide* ». Leur livre contient aussi une introduction de R. Rashed dans laquelle il étudie la *Géométrie* de Descartes et montre que les travaux algébriques d'al-Khayyām marquent le début de la géométrie algébrique. Ce livre a été traduit en arabe et publié en 2005. La version arabe contient aussi une introduction sur le développement de l'algèbre dans la tradition mathématique arabe[20].

4. L'algèbre d'al-Khayyām.

4. 1. Le projet algébrique d'al-Khayyām.

Un des traits caractéristiques du travail algébrique d'al-Khayyām est qu'il est le fruit de la réalisation d'un projet clair. Il l'a, lui-même énoncé, explicitement, et a souligné le fait qu'il est le premier mathématicien à avoir conçu un tel projet. Il a en effet remarqué que de nombreux problèmes géométriques solides, traités par ses prédécesseurs arabes ou grecs, étaient résolus par intersection de sections coniques. Il a remarqué aussi que, pour résoudre certains de tels problèmes, quelques chercheurs arabes les avaient transformés en des équations algébriques du 3^{e} degré. Il a rappelé que ces chercheurs n'ont réussi à résoudre que quelques-unes de ces équations, que leurs solutions étaient faites dans des cas particuliers, sans envisager le problème de résoudre ce genre d'équations dans sa généralité et sans considérer les cas où la résolution est impossible. Son projet était le résultat de ces observations : Résoudre tous les types d'équations de degrés ≤ 3 et discuter le problème de l'existence de solution. Il a annoncé ce projet dans chacun de ses deux traités

[20] Nous nous appuyons principalement sur ce livre dans notre exposé car il prend en considération les études qui ont précédé sa publication en y rectifiant plusieurs données. En revanche, sa lecture ne dispense pas le chercheur de la lecture de l'œuvre susmentionnée de F. Wœpcke qui, en plus du traité algébrique d'al-Khayyām, contient d'importants données et commentaires mathématiques et historiques.

algébriques[21] et exprimé sa volonté de le réaliser géométriquement, en procédant par intersections de coniques. Il a souligné le fait que ni lui ni ses prédécesseurs n'avaient pu résoudre ce genre d'équations algébriquement (par radicaux), et n'a pas manqué d'exprimer son espoir qu'une solution algébrique sera réalisée plus tard par ses successeurs[22]. Il a averti le lecteur que la compréhension de son traité nécessite une maîtrise des *Éléments* et du livre des *Données* d'Euclide ainsi que des deux premiers livres des *Coniques* d'Apollonius[23].

4. 2. Description du contenu du traité algébrique d'al-Khayyām.

Al-Khayyām avait écrit le traité intitulé « *maqāla fī al-jabr et al-muqābala* » pour réaliser son projet en algèbre qu'il avait annoncé dans son traité *Sur la division du quart du cercle*.

On peut diviser ce traité en quatre parties : 1) une introduction mathématique et historique, 2) la résolution des équations algébriques de degré ≤ 3, 3) les équations contenant $\frac{1}{x}$, 4) une remarque concernant l'originalité de son travail. Ce qui nous importe dans ce paragraphe c'en est la deuxième partie. Donnons pourtant quelques remarques concernant les autres parties.

La lecture de l'introduction est nécessaire pour celui qui s'intéresse à l'histoire des mathématiques. Elle est écrite dans un style pratiqué jusqu'à nos jours qui constitue un modèle de rédaction des

---

[21] Les traités 1) et 2) cités plus haut : *Traité sur la division du quart du cercle,* et *Un article sur l'algèbre et al-muqābala* (« *maqāla fī al-jabr wa al-muqābala* »).

[22] « *Mais à la démonstration de ces espèces lorsque l'objet du problème est un nombre absolu, ni moi, ni aucun homme de cet art , ne sommes parvenus –peut-être d'autres, qui nous succéderont , sauront-ils le faire- que pour les trois premiers rangs, à savoir le nombre, la chose et le carré ... Sache que la démonstration géométrique de ces méthodes ne dispense pas de leur démonstration numérique, si l'objet est un nombre et non pas une grandeur mesurable* » [Rashed et Whahabzadeh, p. 124]. Par « *les trois premiers rangs ...* » al-Khayyām entend les équations du 2e degré, où interviennent « *le nombre, la chose, x, et le carré x^2* ».

[23] « *Il faut bien savoir que ce traité ne sera compris que de ceux qui maîtrisent le livre d'Euclide sur les* Éléments *et son livre sur les* Données*, ainsi que deux livres de l'ouvrage d'Apollonius sur les* Coniques ».

articles de recherche. En effet, dans un premier paragraphe de cette introduction, al-Khayyām expose le sujet (la résolution des équations algébriques de degrés ≤ 3) et les raisons scientifiques qui appellent à le traiter ; puis, il expose les apports de ses prédécesseurs concernant ce sujet et les difficultés rencontrées par ceux-ci, ou qui persistent et que l'on doit surmonter pour le réaliser avec la perfection désirée. L'introduction expose aussi les principales références de l'auteur ainsi que la formation que le lecteur de l'article doit posséder pour pouvoir le comprendre.

La deuxième partie de l'introduction, reflète aussi le niveau des mathématiques de l'époque. Al-Khayyām y exprime que le sujet de l'algèbre est, pour lui, « *le nombre absolu* » et « *les grandeurs mesurables* » (« *la ligne, le plan et le solide* »). Il dit que « *par habitude, les algébristes appellent l'inconnue* chose », puis il évoque les puissances de la *chose* et de la succession de ces puissances en proportion. Son style très concis sur ce point reflète probablement le fait qu'il le considère comme un sujet classique bien connu à son époque. Dans un important passage sur les dimensions, il explique qu'en géométrie il n'y en a que les trois premières : « *Si l'algébriste emploie le carré-carré dans des problèmes de mesure, cela doit s'entendre métaphoriquement et non pas proprement, puisqu'il est absurde que le carré-carré soit au nombre des grandeurs mesurables. Ce qui rentre dans la catégorie des grandeurs mesurables, c'est d'abord une (seule) dimension, à savoir la racine, ou, par rapport à son carré, le côté; puis deux dimensions : c'est la surface; et le carré (māl) dans les grandeurs mesurables, est donc la surface carrée. Enfin trois dimensions, c'est-à-dire le solide; le cube parmi les grandeurs mesurables, étant le solide délimité par six carrés. Or comme il n'y a pas d'autre dimension, il ne peut rentrer dans la catégorie des grandeurs mesurables ni le carré-carré, ni à plus forte raison ce qui lui est supérieur* »[24].

Ensuite, al-Khayyām donne les (espèces d') équations que l'on peut former à partir des quatre grandeurs qu'il vient de citer (le

[24] [Wœpcke, 1851, pp. 7-8] et [Rashed et Whahabzadeh, p. 122].

nombre, la *chose*, le *carré* et le *cube*) et il les classe suivant le nombre de leurs monômes. Il obtient ainsi deux classes : les équations « simples » (binômes) et les équations « combinées » (polynômes). La liste de ces équations peut être donnée par les tableaux suivants :

Les équations binômes	
(1) Un nombre est égal à une racine :	(1) $x = c$
(2) Un nombre est égal à un carré :	(2) $x^2 = c$
(3) Un nombre est égal à un cube :	(3) $x^3 = c$
(4) Des racines sont égales à un carré :	(4) $x^2 = bx$
(5) Des carrés sont égaux à un cube :	(5) $x^3 = ax^2$
(6) Des racines sont égales à un cube :	(6) $x^3 = bx$

Les équations trinômes du 2^e degré, ou cubiques équivalentes à des équations du 2^e degré	
(7) Un carré et des racines sont égaux à un nombre :	(7) $x^2 + bx = c$
(8) Un carré et un nombre sont égaux à des racines :	(8) $x^2 + c = bx$
(9) Des racines et un nombre sont égaux à un carré :	(9) $x^2 = bx + c$
(10) Un cube et des carrés sont égaux à des racines :	(10) $x^3 + ax^2 = bx$
(11) Un cube et des racines sont égaux à des carrés:	(11) $x^3 + bx = ax^2$
(12) Des racines et des carrés sont égaux à un cube :	(12) $x^3 = ax^2 + bx$

Les équations cubiques trinômes	
(13) Un cube et des racines sont égaux à un nombre :	(13) $x^3+bx=c$
(14) Un cube et un nombre sont égaux à des racines :	(14) $x^3+c=bx$
(15) Des racines et un nombre sont égaux à un cube :	(15) $x^3=bx+c$
(16) Un cube et des carrés sont égaux à un nombre :	(16) $x^3+ax^2=c$
(17) Un cube et un nombre sont égaux à des carrés :	(17) $x^3+c=ax^2$
(18) Un nombre et des carrés sont égaux à un cube :	(18) $x^3=ax^2+c$

Les équations quadrinômes 1e / où trois degrés sont égalés à un seul	
(19) Un cube, des carrés et des racines sont égaux à un nombre :	(19) $x^3+ax^2+bx=c$
(20) Un cube, des carrés et un nombre sont égaux à des racines :	(20) $x^3+ax^2+c=bx$
(21) Un cube, des racines et un nombre sont égaux à des carrés :	(21) $x^3+bx+c=ax^2$
(22) Un cube est égal à des racines, des carrés et un nombre :	(22) $x^3=ax^2+bx+c$
2e / où deux degrés sont égalés à deux autres	
(23) Un cube et des carrés sont égaux à des racines et un nombre :	(23) $x^3+ax^2=bx+c$
(24) Un cube et des racines sont égaux à des carrés et un nombre :	(24) $x^3+bx=ax^2+c$
(25) Un nombre et un cube sont égaux cube et à des racines et des carrés :	(25) $x^3+c=ax^2+bx$

Remarques.

1) Al-Khayyām n'a pas donné la liste sous la forme de tableau et n'a pas numéroté les espèces d'équations. Nous avons adopté la numérotation ci-dessus (conforme à l'ordre dans lequel al-Khayyām les a annoncées et traitées) pour faciliter la référence à chacune d'elles. Cet ordre est différent de celui qu'il a donné précédemment dans son traité sur la division du quart du cercle.

2) Il a présenté la liste des équations avec les expressions verbales citées ci-dessus, mais il a modifié ces expressions quand il a commencé à résoudre successivement les équations; alors elles sont devenues plus précises. A titre d'exemple, il a exprimé l'équation (13) dans les termes suivants : « *un cube et des côtés sont égaux à un nombre* » et il a donné l'équation (25) dans ces termes : « *un cube et des nombres sont égaux à des côtés et des carrés* ».

3) Il a commencé le traitement de l'équation (3) juste après les deux équations (1) et (2) et a remarqué que sa résolution nécessite l'intervention des sections coniques ; alors il l'a ajournée jusqu'à ce qu'il ait commencé la résolution des équations cubiques non réductibles à des équations du 2e degré.

Dans la troisième partie du traité al-Khayyām étudie la résolution des équations dans lesquelles figure l'inverse de l'inconnue. La rapidité avec laquelle il rappelle les calculs concernant les puissances de x et celles de $\frac{1}{x}$ donne l'impression qu'il suppose que ces calculs sont des données classiques connues du lecteur d'un traité de recherche comme le sien, qui a donc dû connaître l'algèbre d'al-Karagī. Al-Khayyām part de sa vision géométrique de l'algèbre et du fait que les puissances de x au-delà de la 3e n'ont pas de sens en géométrie. Ainsi, il s'intéresse exclusivement aux équations qui sont formées à partir de :

$$\frac{1}{x^3}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x}, 1, x, x^2, x^3$$

Il attire l'attention sur le fait que de telles équations peuvent être du 5e ou du 6e degré qui ne peuvent pas être résolues au moyen de sections coniques, alors il restreint son traitement à celles qui se transforment en des équations de degrés ≤ 3. Une des équations qu'il traite est la suivante :

$$x + 2 + \frac{10}{x} = \frac{20}{x^2} \; ;$$

Il l'a transformée en l'équation :

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20 \, .$$

A propos de cette équation, R. Rashed dit qu'avec les mêmes coefficients, elle « *a voyagé, pour aboutir au* Flos *de Fibonacci. Al-Khayyām- pour sa part avait montré qu'elle se résout au moyen d'un cercle et d'une hyperbole ... Fibonacci en donne une solution arithmétique. Cet acte de transmission pourrait par ailleurs inspirer bien des conjectures dont chacune ne l'emporte sur l'autre* »[25].

La quatrième partie du traité ne porte pas de titre. R. Rashed et A. Djebbar lui avaient donné le titre suivant : « *Le problème d'abū al-Jūd ibn al-Layth* ». Il semble qu'al-Khayyām l'ait ajoutée dans le but de montrer l'originalité de son projet mathématique et de sa réalisation. Il y attire, de nouveau, l'attention sur le fait que les recherches sur la résolution des équations cubiques qui avaient précédé son traité, ne se sont pas posé le problème dans sa généralité et que ces recherches s'étaient déroulées à l'occasion du traitement de certains problèmes géométriques qui ont été transformés en des problèmes de résolution d'équations cubiques particulières. Il montre que les essais d'Abū al-Jūd (qu'il considère les plus avancés dans ce domaine) s'étaient déroulés « *sans toutefois en épuiser toutes les formes (ou espèces) et sans distinguer les cas possibles des cas impossibles, mais en donnant seulement les développements auxquels il était conduit par la considération de problèmes particuliers dépendant de ces espèces* ». Il dit qu'il avait vu et examiné la résolution de deux équations cubiques de deux espèces différentes, l'une est trinôme: *un cube et un nombre sont égaux à des carrés*,

[25] [Rashed et Whahabzadeh, p. 88]. R. Rashed renvoie à la page 149 de son article : "Fibonacci et les mathématiques arabes". *Micrologues* II, 1994, pp. 145-160.

l'autre espèce est quadrinôme : *un cube plus un nombre plus des côtés sont égaux à des carrés*. En ce qui concerne la solution par abū al-Jūd de la deuxième, il dit : « *Et, par ma vie, il a excellé en s'appliquant à ce problème devant lequel un groupe de géomètres s'étaient épuisés en vains efforts pour le résoudre. Mais son problème est particulier, et son espèce comporte différentes formes et conditions; car dans ses problèmes il y en a qui sont impossibles. De tout cela il ne donna pas une discussion complète* ». À propos de la première équation, il dit qu'Abū al-Jūd « *n'a pas épuisé les conditions, et ensuite il s'est trompé de nouveau à l'occasion de cette espèce ...* » ; il poursuit : « *un de nos amis nous a suggéré de montrer l'erreur commise par abū al-jūd ...* »[26]. En fait, le reste de cette partie du traité est consacré à exposer la méthode d'Abū al-Jūd et à souligner les lacunes dans sa résolution de cette équation. Remarquons toutefois le style décent et respectueux avec lequel al-Khayyām formule ses critiques aux essais de ses prédécesseurs et notamment d'Abū al-Jūd qu'il qualifie à deux reprises d'*éminent*[27].

4. 3. Résolutions des équations.

Al-Khayyām a exprimé explicitement son intention de résoudre géométriquement les équations ; c'est ce qu'il a fait effectivement. Mais, la traduction des équations en langage de géométrie exige des calculs géométriques. C'est ainsi qu'il a introduit la notion du « *un* » ou de « *l'unité* » de mesure dans chacune des trois dimensions géométriques : *la ligne*, le *plan* (*i. e.* la surface) et *le solide* (*i. e.* le volume). Cette notion a été introduite avant lui par les mathématiciens géomètres comme les frères Banū Mūsā (IX^e^ s.) et Ibn al-Haytham. L'introduction de cette *unité* dans les calculs lui a permis de respecter minutieusement l'homogénéité dans les équations. Nous avons souligné dans un paragraphe précédent qu'il a fait le lien entre les grandeurs algébriques (la *chose*, le *māl* et le *cube*) et les dimensions géométriques représentées par *la ligne*, la surface carrée et *le cube*

26 [Wœpcke, 1851, p. 82, et Rashed et Vahabzadeh, 1999, pp. 227-229].

27 Voir [Farès, 2017, pp. 177-199] ou [Rashed et Vahabzadeh, 1999, pp. 254-256].

(volume). Ainsi, pour que l'équation soit homogène, al-Khayyām considère ses monômes comme des grandeurs homogènes car l'équation exprime une égalité entre deux grandeurs -ses membres- qui doivent donc être homogènes. Ainsi, dans l'équation $x^3 + ax^2 + bx = c$ (comme dans toutes les équations cubiques), il considère c comme un volume (soit un cube, soit un parallélépipède droit de base l'unité de surface et de hauteur la ligne c), b comme une surface carrée et a comme (un segment d') une ligne droite. Il écrit, en effet : « *Toutes les fois que nous dirons dans ce traité : un nombre est égal à un rectangle, nous entendrons par le nombre un quadrilatère à angles droits, dont l'un des côtés est l'unité, et le second une ligne égale en mesure au nombre donné ... et, toutes les fois que nous dirons : un nombre est égal à un solide, nous entendrons ici par le nombre un solide à côtés parallèles et à angles droits, ayant pour base le carré de l'unité, et dont la hauteur est égale au nombre donné* ... ». « *Tu sais d'ailleurs ce qu'il faut entendre dans notre traité par le nombre solide: c'est un solide dont la base est le carré de l'unité, et dont la hauteur est égale au nombre donné, c'est-à-dire à une ligne dont le rapport au côté de la base du solide est égal au rapport du nombre donné à l'unité* »[28].

Au cours de ses démonstrations, al-Khayyām respecte minutieusement le principe de l'homogénéité. À titre d'exemple, il considère $\frac{c}{a}$ comme le rectangle, base du parallélépipède de volume c et de hauteur a ; de même, il considère $\frac{c}{b}$ comme la hauteur du parallélépipède de volume c dont la base est le rectangle b. Il n'omet pas de donner les lemmes permettant la construction géométrique des rectangles tels que $\frac{c}{a}$ et des lignes telles que $\frac{c}{b}$ ou $\frac{b}{a}$. De même, il

[28] [Wœpcke, 1851, pp. 14, 15 et 33, et Rashed et Vahabzadeh, 1999, pp.130, 131 et 162].

donne des propositions qui lui sont utiles pour effectuer ses calculs, comme celle permettant de construire $\sqrt[3]{c}$ (le côté du cube égal à *c*) ou $\sqrt[2]{b}$ (le côté du carré égal à *b*).

4. 3. 1. Les équations de degrés ≤ 2.

Il s'agit de celles d'al-Khwārizmī[29] numérotées 1, 2, 4, 7, 8, 9 dans la liste donnée ci-dessus. Al-Khayyām ne s'étend pas sur la résolution de ces types d'équation (notamment en ce qui concerne les équations 1 et 4) ; il semble, d'après son style concis, qu'il suppose que la résolution de ces types d'équations était bien connue à son époque. Il énonce l'algorithme de résolution de chacune des équations trinômes et le justifie géométriquement en utilisant les Livres II et VI des *Éléments* et le livre des *Données* d'Euclide[30].

Remarque. Nous pouvons souligner qu'il y a du nouveau dans sa résolution du type (2) : $x^2 = c$. En plus de sa citation du traité (toujours introuvable) dans lequel il résout par des calculs les équations $x^n = c$ pour n quelconque, il résout géométriquement le type (2) par une méthode que nous n'avons pas rencontrée chez ses prédécesseurs. Cette méthode utilise explicitement la proposition II.14 des *Éléments*. Elle revient à prendre une ligne *AB* représentant *c* ($= \frac{c}{1}$, où 1 est l'unité linéaire), à la prolonger (du côté de B) jusqu'au point *C* de telle sorte que *BC* soit égal à l'unité et de construire le demi-cercle de diamètre *AC*. Alors, la perpendiculaire à *AC* au point *B* rencontre le demi-cercle en *H*, et *BH* est la solution :

$$HB^2 = BC.AB = 1.AB = AB = c .$$

[29] Voir [Farès, 2015] ou [Rashed, 2007].

[30] Al-Khayyām est explicite en se référant au Livre VI des *Éléments* et au livre des *Données* dans sa justification de l'algorithme de l'équation (7). Il est, de même, explicite en se référant aux livres II et VI des *Éléments* en ce qui concerne l'équation 8. Pourtant, en ce qui concerne les équations 7 et 9, il utilise implicitement la proposition II. 6 des *Éléments*.

4. 3. 2. Les équations cubiques équivalentes à des équations de degrés ≤ 2.

Il s'agit des équations numérotées 5, 6, 10, 11, 12, selon l'ordre d'al-Khayyām. Celui-ci démontre qu'elles sont respectivement équivalentes aux équations numérotées 2, 4, 7, 8, 9 selon le même ordre. Ses démonstrations utilisent la théorie des proportions euclidienne et, dans chacune de ces cinq équivalences, les puissances de *x* sont représentés géométriquement : *x* par une ligne, x^2 et x^3 par le carré et le cube de côtés *x*.

4. 3. 3. Résolutions des équations cubiques non réductibles à des équations de degrés ≤ 2.

Al-Khayyām résout chacune de ces espèces par l'intersection de deux coniques prises parmi les suivantes: le cercle, la parabole et l'hyperbole équilatère. Le tableau suivant donne le classement de ces (espèces d') équations et le couple de sections coniques utilisé (ou choisi) par al-Khayyām dans la résolution de chacune d'elles. Dans la colonne : « couple de coniques », la lettre « p » désigne une parabole, « c » un cercle et « h » une hyperbole équilatère ».

L'équation	**Son classement**	**Couple de coniques:**
$x^3 = c$	(3)	(p, p)
$x^3 + bx = c$	(13)	(p, c)
$x^3 + c = bx$	(14)	(p, h)
$x^3 = bx + c$	(15)	(p, h)
$x^3 + ax^2 = c$	(16)	(p, h)
$x^3 + c = ax^2$	(17)	(p, h)
$x^3 = ax^2 + c$	(18)	(p, h)
$x^3 + ax^2 + bx = c$	(19)	(c, h)
$x^3 + ax^2 + c = bx$	(20)	(h, h)
$x^3 + bx + c = ax^2$	(21)	(c, h)

$x^3 = ax^2 + bx + c$	(22)	(h, h)
$x^3 + ax^2 = bx + c$	(23)	(h, h)
$x^3 + bx = ax^2 + c$	(24)	(c, h)
$x^3 + c = ax^2 + bx$	(25)	(h, h)

***

Pour plus d'informations sur :

1. Les méthodes de résolution et le langage mathématique d'al-Khayyām,
2. Le choix des courbes fait par al-Khayyām dans sa résolution des équations cubiques et la **comparaison de ses méthodes avec celles de Descartes**
3. Les propos d'al-Khayyām concernant son projet algébrique et les travaux de ses prédécesseurs.
4. Les propos d'al-Khayyām sur les relations entre l'algèbre et la géométrie.
5. L'approche par al-Khayyām des méthodes numériques,

on pourra consulter [Farès, 2017, ch. V, pp. 174-203].

Bibliographie

Anbouba, A. 1978. "L'algèbre arabe aux IX^e et X^e siècles – Aperçu général". *Journal for the history of Arabic science*. Alep. Vol. 1, no. 2, pp. 66 – 100.

Ben Miled, Marwan. 1999. "Les commentaires d'Al-Māhānī et d'un anonyme, du livre X des *Eléments* dÉuclide" *Arabic Sciences and Philosophy*, vol. 9, no 2, Septembre.

Ben Miled, M. 2005. *Opérer sur le continu*. Académie tunisienne Beït al-Hikma, Carthage.

Djebbar, A et Rashed, R. 1981. *L'Œuvre algébrique d'al-Khayyām*, Univ. d'Alep.

Djebbar A. 2005. *L'algèbre arabe, genèse d'un art*. Vuibert-Paris.

Farès, N. 2005. "Note sur le choix des courbes fait par al-Khayyâm dans sa résolution des équations cubiques et comparaison avec la méthode de Descartes". *Lebanese Science Journal*, Vol. 6-1, CNRS-Liban, Beyrouth, pp. 95-117.

Farès, N. 2009. La notion d'irrationalité selon un mathématicien du X^e siècle: Abū Ja'far al-Khāzin. *Lebanese Science Journal*, 10 (2) ; pp. 113-123.

Farès, N. 2015. Al-Khwārizmī et le fondement analytique de l'algèbre. *Lebanese Science Journal*, Vol. 16, No. 1.

Farès, N. 2016. *Commentaire du Livre X des Éléments d'Euclide, par Abū Ja'far al-Khāzin*. Éditions de l'Université Libanaise, Beyrouth.

Farès, N. 2017. *Naissance et développement de l'algèbre dans la tradition mathématique arabe*, Dār al-Fārābī, Beyrouth.

Heath, T. 1956. (Sir Thomas L. Heath). *The thirteen books of EUCLID'S ELEMENTS*, 2nd edition, 3 vol. Dover New York.

Houzel, C. 2002. *La géométrie algébrique–Recherches historiques*, Blanchard, Paris.

Al-Qifṭī' (Ibn), *Ta'rīḫ al-Ḥukamā'*. Ed. J. Lippert. Leipzig. 1903.

القِفطي (أبو الحسن علي بن يوسف)، تاريخ الحكماء، وهو مختصر الزوزني المسمّى بالمختصرات الملتقطات من كتاب إخبار العلماء بأخبار الحكماء، تحقيق يوليوس ليبرت (ليبتزج)، ١٩٠٣.

Rashed, R. 1984. *Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*. Les Belles Lettres, Paris.

Rashed, R. 1986. *Sharaf al-Dîn al-Tûsî: Œuvres mathématiques. Algèbre et géométrie au XIIe siècle*. T. 1 et 2. Les Belles Lettres, Paris.

Rashed, 1994. "Fibonacci et les mathématiques arabes". *Micrologues* II, p.p. 145-160.

Rashed, R. 1997 (sous la direction de, avec la collaboration de Morelon, R). *Histoire des sciences arabres*", Seuil, Paris.

Rashed, R. et Vahabzadeh, B. 1999. "*Al-Khayyām mathématicien*", Blanchard, Paris.

Rashed, R. 2007. *Al-Khwārizmī – Le commencement de l'algèbre*, Blanchard, Paris.

Rashed, R. 2012. *Abu Kāmil: Algèbre et analyse diophantienne. Édition, traduction et commentaire.* De Gruyter, Walter, Inc.

Vahabzadeh, B. 2014. "Khayyam, Omar vi. As Mathematician". *Encyclopædia Iranica Online*, available at http://www.iranicaonline.org/articles/khayyam-omar-vi-mathematician.

Ver Eecke, P. 1926. *Diophante d'Alexandrie : les six livres d'arithmétique et le livre des nombres polygones*. Blanchard, Paris.

Vitrac, B. 1990-2001. *Euclide d'Alexandrie. Les Éléments*, vol. 1 : 1990, vol. 2 : 1994, vol. 3 : 1998, vol. 4 : 2001. PUF, Paris.

Wœpcke, F. 1851. *L'Algèbre d'Omar Alkhayyâmî*. Librairie de l'Institut, Paris.

Youschkévitch, A. P. 1976. *Les mathématiques arabes (VIIIe-XVe siècle)*, Vrin, Paris.