الكَرَجي (أبو بكر محمّد بن حسن)

حياته وأعماله وجبره – نضوج الجبر في منحاه الحسابي

بقلم نقولا فارس (١-١٢-٢٠١٧)

"فريق الدراسة والبحث في التقليد العلمي العربي"
(الجمعيّة اللبنانيّة لتاريخ العلوم العربيّة)

هذه الدراسة مقتطعة من الفصل الرابع من كتاب نقولا فارس: "الجبر– ولادته وتطوّره في التقليد الرياضي العربي"، دار الفارابي، بيروت، ٢٠١٧.

١. حياته وأعماله.

أبو بكر محمّد بن حسن الكرجي مهندس ورياضي عاش وأنتج أهمّ أعماله الرياضيّة في بغداد، ما بين نهاية القرن العاشر وبداية القرن الحادي عشر للميلاد، ثمّ ترك تلك المدينة ليعيش في ما سمّاه "أرض الجبل"[١]، وهناك ألّف كتابه ذا العنوان: "كتاب إنباط المياه الخفيّة".

تعرّفت أوروبا إلى هذا الرياضي منذ النصف الثاني من القرن التاسع عشر، بفضل الكتاب الذي ألّفه مؤرّخ الرياضيّات الألماني فرانتز وبكيه (F. Woepke) عام ١٨٥٣، والذي يحمل عنوان: "مقتطفات من الفخري" (*Extrait d'al-Fakhrī*) [Wœpcke, 1853]، ومن ثمّ بفضل ترجمة كتاب "الكافي" إلى الألمانيّة التي قام بها أ.

[١] "أرض الجبل" أو "بلاد الجبل" هي بلاد تضمّ المدن الواقعة بين أذربيجان والعراق العربي وخوزستان وإيران وبلاد الديلم بالقرب من بحر قزوين [Rashed, 1984 (1), p. 32].

هوكهايم (A. Hochheim) بين عامي ١٨٧٨ و١٨٨٠[٢]. وكانت كُنية ذلك الرياضي بالنسبة إلى هذين الرياضيّين هي "الكَرْخي". وفي عام ١٩٣٣، اعترض المؤرّخ جيورجيو ديلاّ فيدا (Giorgio della Vida) على تلك الكنية وقدّم أدلّة على أنّها في الواقِع "الكَرَجي"[٣].

وعلى حدّ علمنا، كان أوّل من لفت الانتباه إلى رياضيّات الكرجي في العالَم العربي كان الباحث عادل أنبوبا، في مقال نشره عام ١٩٥٩[Anbouba, 1959]. وعام ١٩٦٤ نشر الباحث نفسه تحقيقاً لكتاب الكرجي ذي العنوان "البديع في الحساب"، مصحوباً بدراسة رياضيّة للكتاب وبدراسة تاريخيّة عميقة تناول فيها حياة الكرجي ومؤلّفاته. في دراسته تلك، أكّد ع. أنبوبا ما ذهب إليه ديلاّ فيدا حول اسم ذلك الرياضي مقدّماً أدلّة إضافيّة على ذلك[٤]. وحاليّاً يتبنّى مؤرّخو الرياضيّات، عامّةً، تسميَة "الكرجي"، حتّى أولئك الذين لم تقنعهم الحجج التي قدّمها ع. أنبوبا.

وعام ١٩٧١ أشار ر. راشد إلى أعمال الكرجي في مقال حول "حسبنة الجبر"[٥]، كما أشار إلى تلك الأعمال في كتاب حول جبر "السموأل" ألّفه بالاشتراك

---

[٢] "الكافي في الحساب" أو أيضاً "كافي الحساب". يقدّم سامي شلهوب تحقيقاً لنصّ هذا الكتاب في كتاب يحمل العنوان نفسه ويؤكّد فيه ما كان قد كتبه عادل أنبوبا حول حياة الكرجي واسمه وأعماله [شلهوب، ١٩٨٦].

[٣] "الكَرْخ" اسم لإحدى مناطق مدينة بغداد. أمّا "الكَرَج" فيقول عادل أنبوبا استناداً إلى "معجم البلدان" لياقوت بن عبدالله الحموي، إنّه "اسم لأربع نواحٍ من بلاد الجبل في إيران" [أنبوبا، ١٩٦٤، ص. ٧] وتذكر بعض المراجع أنّ الكرَج هو اسم للبلاد التي تعرف اليوم باسم جورجيا، وذلك محتمل لتقارب اللفظتين ولقرب تلك البلاد ممّا سمّي بـ أرض الجبل".

[٤] أحد الأدلّة التي قدّمها أنبوبا يستند إلى ما كتبه الكرجي نفسه في "كتاب إنباط المياه الخفيّة"حول أنّه لم يكن في الأصل في العراق وأنّه "رجع" من هذا البلد بعد أن أقام فيه مدّة من الزمن: "لما دخلت العراق ورأيت أهلها من الصغار والكبار يحبّون العلم ويعظّمون قدره ويكرمون أهله، صنّفت في كلّ مدّة تصنيفاً في الحساب والهندسة إلى أن رجعت إلى أرض الجبل وعدمت فيها ما صنّفته من حال العراق" [أنبوبا، ١٩٦٤، ص. ١٢].

[٥] راجع: Rashed, R. 1971. “L’arithmétisation de l’algèbre au XI^{e} siècle ». *Actes du CIHS*, Moscou..

مع صلاح أحمد [أحمد وراشد، ١٩٧٢]؛ ثمّ قدّم دراسة حول الكرجي ضمن كتابه "تاريخ الرياضيّات العربيّة بين الجبر والحساب"، الذي ألّفه بالفرنسيّة عام ١٩٨٤ وتُرجِم إلى العربيّة عام ١٩٨٩ [Rashed, 1984 (1), pp. 31-42].

يذكر عادل أنبوبا ١١ عنواناً لكتب أو رسائل ألّفها الكرجي في مجالات علميّة مختلفة: الرياضيّات، والفلك والهندسة، لم يصل إلى عصرنا منها سوى خمسة. تلك العناوين هي: ١) "كتاب في الحساب الهندي"، ٢) "كتاب في الاستقراء"، ٣) "كتاب نوادر الأشكال"، ٥) "الفَخري"، ٦) "البديع"، ٧) "الكافي في الحساب"، ٨) "عِلل حساب الجبر والمقابلة"، ٩) "كتاب إنباط المياه الخفيّة"، ١٠) "كتاب عقود الأبنية"، ١١) "المدخل إلى علم النجوم" [أنبوبا، ١٩٦٤، ص. 31-19]. ويُذكِّر أنبوبا بأنّ للكرجي كتاباً آخَر ذكر السموأل (القرن ١٢م.) أنّه أخذ عنه توسيع $(a+b)^n$، دون أن يُعطي عنوانه. نشير أخيراً إلى أنّ الكرجي يرجع في كتابه "الفخري" إلى كتاب في الحساب يسمّيه "كتاب الكفاية" (يوحي سياق النص أنّه من تأليفه)، يقول إنّه يعالج، من بين أمور أخرى، مسألة الجذور التربيعية للأعداد[الكرجي (٢)، الورقة ١٦و-١٦ظ][٦]. وعلى حدّ علمنا، لم يُذكر ذلك العنوان في أيّ من لوائح عناوين أعمال الكرجي التي توردها المراجع التي ذكرناها والمتعلّقة بهذا الرياضي.

يوجد العمل الجبري الأساسي للكرجي في ثلاثة كتب له وصلت إلى عصرنا هي، بحسب الترتيب الزمني، التالية:

١) "كتاب الفخري في الجبر والمقابلة " السابق ذكره، وهو عمله الرئيسي في الجبر،

[٦] يبدو أنّ هذا الكتاب هو نفسه الكتاب الذي رجع إليه الكرجي في كتابه "البديع" وسمّاه "كتابنا المصنّف في حساب الهند" [أنبوبا، ١٩٦٤، ص. ٥٢]، وورد في لائحة ع. أنبوبا تحت عنوان "كتاب في الحساب الهندي".

٢) "البديع في الحساب" وهو كتاب مهمّ يتناول مواضيع في علم الحساب والجبر ونظريّة المقادير غير المنطَقة والتحليل العددي،

٣) "الكافي في الحساب" وهو كتاب جبريّ أقلّ أهميّة من "الفخري"، لأنّه لا يتوجّه (كالكتابين السابقين) إلى الرياضيّين، بل إلى جمهور أوسع يتضمّن الموظّفين والكتبة والمسّاحين.

٤) الرسالة في الجبر ذات العنوان: "علل حساب الجبر والمقابلة والبرهان عليها". في هذه الرسالة يعرض الكرجي حلاً جبريّاً لمعادلات الدرجة الثانية ثلاثيّة الحدود، مع المقدّمات الضروريّة لذلك الحلّ [الكرجي (١)].

إلى تلك الأعمال الجبريّة التي ذكرناها ووصلت إلى عصرنا، يضاف مقطع من كتاب مجهول العنوان مفقود، يبدو أنّ الكرجي ألّفه بعد "البديع". في هذا المقطع الذي ينقله خَلَفُه، السموأل، في كتابه "الباهر في الجبر"، يعطي الكرجي توسيع $(a+b)^n$ ويقدّم معاملات هذا التوسيع حتّى $n=12$، في جدول مثلّث ويشرح خوارزميّة بناء ذلك الجدول، الذي ليس سوى "المثلّث الحسابي" المنسوب إلى باسكال (Pascal : 1623-1662) أو إلى تارتاغليا (Tartaglia : 1499-1557)[٧].

٢. جبر الكَرَجي.

"طوّر الكَرجي إلى أبعد حدّ أبحاث أبي كامل (حوالى ٨٣٠-٩٠٠م)[٨] في الجبر وفي التحليل الديوفنطسي ..." و"بفضل العمل الجبري لأبي كامل وكتاب

---

[٧] أنظر [أحمد وراشد، ١٩٧٢، ص. ١١٠-١١١] وانظر الصورة في نهاية هذا المقال.

[٨] راجع [Rashed, 2012] و[فارس، ٢٠١٧، الفصل ٤، Farès, 2017, ch. IV].

"الحساب" لديوفنطس (حوالى القرن ٣ م.)، تمكّن الكرجي من تصوّر منهج جديد، طبع مصير الجبر، يمكننا تسميته منهج "حسبنة الجبر" [Rashed, 2012, p. 11]. وكأنّ خليفة الكرجي، السموأل بن يحي المغربي، يفسّر عبارة "حسبنة الجبر" هذه إذ يقول إنّ العمل في الجبر يعود إلى "التصرّف في المجهولات بجميع الأدوات الحسابيّة كما يتصرّف الحاسب في المعلومات" [أحمد وراشد، ص. ٩ من النصّ العربي].

ومن بين الأسباب التي جعلت مشروع "حسبنة الجبر" يرتبط باسم الكرجي، كونه أوّل جبريّ من خلفاء الخوارزمي (...–٨١٣–٨٣٣...م.) يقلب ترتيب الفصول الجبريّة كما وضعه هذا الأخير، وكما سار عليه خلفاؤه (أبو كامل وسنان بن الفتح (القرن ١٠م)، ...) في كتاباتهم الجبريّة. فخلافاً لترتيب هؤلاء، يسبق الفصلُ المخصّص للحسابات الجبريّة، في رسائل الكرجي الجبريّة، الفصلَ الذي يعالج حلّ المعادلات. وهذا الترتيب الجديد مؤشّر على نيّة الكرجي في استخدام قواعد الحساب الجبري في البراهين التي تلي إدخال تلك القواعد، (وهذا ما يقوم به في الواقع) ممّا يدعِّم أسس الجبر. يُضاف إلى ذلك، أنّ كتاب "البديع" والرسالة التي خصّصها لحلّ معادلات الدرجة الثانية جبريّاً (التي سبق ذكرها) لا يحويان أيّ استدلال هندسي أو حتّى أي شكل هندسي. هذا الأسلوب في ترتيب الفصول الجبريّة وفي غياب الاستدلال الهندسي لم ينقطع من بعد الكرجي[٩].

تهدف النظرة السريعة التي سنلقيها في ما يلي، على جبر الكرجي، إلى إبراز المنحى الحسابي في عمله وإلى ابتعاده في هذا العمل عن الهندسة قياساً على أساليب

[٩] راجع الملحوظة الإضافيّة ٢–أ، في الفقرة ٣، من الفصل الثالث (ص. ١٠٢–١٠٤) من كتاب [فارس، ٢٠١٧].

من سبقه من الجبريّين. فلن تكون هذه اللمحة كافية لإعطاء فكرة وافية عن إسهام الكرجي في الجبر. لذا ننصح القارئ الذي يرغب بمزيد من التفصيل حول الموضوع، بالعودة إلى المراجع التي ذكرناها في بداية هذه الفقرة. وبما أنّ كتاب "الكافي" لا يقدّم أيّ جديد على المستوى النظري، بالنسبة إلى "الفخري" و"البديع"، سنكتفي بإلقاء نظرة سريعة إلى محتوى هذين الكتابين. وسبق أن ألقينا نظرة إلى مقطع من رسالته حول حلّ معادلات الدرجة الثانية جبريّاً[١٠].

٢-١. "الفخري".

يُقسَم هذا الكتاب إلى قسمين أساسيّين. القسم الأوّل نظريّ ويعالج ثلاثة مواضيع: الحساب الجبري، ونظريّة المعادلات المحدّدة، ونظريّة المعادلات غير المحدّدة. ويتألّف القسم الثاني من مجموعة من المسائل الجبريّة التطبيقيّة.

يتألّف القسم النظريّ من خمسة عشر فصلاً أو فقرة[١١]. الفصول الأحد عشر الأولى مكرّسة للحساب الجبريّ والفصلين الثاني عشر والثالث عشر لحلّ المعادلات المحددة من الدرجتين الأولى والثانية. ونبدأ بإلقاء نظرة إلى هذه الفصول الثلاثة عشر.

يقدّم الكرجي في الفصلين الأوّلين عرضاً مسهباً يحدّد فيه "الجذر" أو "الشيء"، x، وقواه، x^n، و"أجزاءها" (أي الـ $\frac{1}{x^n}$) [Wœpke, 1853, pp. 48-49] و[الكرجي (٢)، الورقات ٢و-٤ظ]. وبينما يتوقف الخوارزمي عند القوّة الثانية من

---

[١٠] راجع الملحوظة الإضافيّة ٢-ب، في الفقرة ٣، من الفصل الثالث (، ص.١٠٥-١٠٦) من كتاب [فارس، ٢٠١٧].

[١١] "باباً" حسب تعبير الكَرجي.

"الشيء"، ويقف بنو موسى عند القوّة الثالثة، وأبو كامل عند الثامنة، يحدّد الكرجي هذه القوى حتّى التاسعة استقرائيّاً ($x^{n} = x^{n-1}.x$)، ويقول إنّ "هذه المراتب تتزايد على هذا التناسب إلى غير النهاية". ويلفت النظر، عن طريق مقارنة تلك القوى بقوى العشَرة (10^{n})، إلى أنّها تتوالى على النسبة ذاتها، أي أنّ:

$$1 : x = x : x^{2} = x^{2} : x^{3} = \ldots$$

ويحدّد ضرب تلك القوى ونِسَبَها وذلك عن طريق الربط بين مفهومي الضرب والنسبة[١٢] ويعطي القاعدة التالية:

$$\frac{1}{x} : \frac{1}{x^{2}} = \frac{1}{x^{2}} : \frac{1}{x^{3}} = \frac{1}{x^{3}} : \frac{1}{x^{4}} = \ldots$$ ،

مع القاعدة:

$$\frac{1}{x^{n}} : \frac{1}{x^{n+1}} = x^{n+1} : x^{n}$$ ،

ثمّ يعطي القاعدة:

$$\frac{1}{a} : \frac{1}{b} = b : a$$ ،

بعموميّتها. وبعد ذلك يُعطي القاعدة التالية:

$$\frac{1}{x} . \frac{1}{x} = \frac{1}{x^{2}} , \ \frac{1}{x^{2}} . \frac{1}{x} = \frac{1}{x^{3}} , \ldots, \frac{1}{x^{n}} . \frac{1}{x^{m}} = \frac{1}{x^{n+m}}$$

والقاعدة:

$$\frac{1}{a} . \frac{1}{b} = \frac{1}{a.b}$$ ،

---

[١٢] بالمقارنة مع الأعداد، من دون أن يذكر بشكل صريح القضيّة VII.19 من "أصول" أقليدس التي تُكتب بمصطلحات عصريّة على الشكل ($a : b = c : d \Leftrightarrow a.d = b.c$).

بعموميّتها، ثمّ القاعدة:

$$\frac{1}{x}.x^2 = \frac{x^2}{x},\ \frac{1}{x}.x^3 = \frac{x^3}{x}\ , \ldots,\ \frac{1}{x^n}.x^m = \frac{x^m}{x^n}$$

وأخيراً، يعطي القاعدة: $\frac{1}{a}.\,b = \frac{b}{a}$ بعموميّتها.

تعالج الفصول الستّة التي تلي الفصلين الأوّلين، بالترتيب، الضرب والقسمة والنسبة واستخراج الجذر التربيعي والجمع والطرح للتعابير الجبريّة كثيرة الحدود، من الأبسط إلى الأكثر تعقيداً. وفيما يخصّ توسيع قوى ذي الحدّين يتوقّف الكرجي عند القوّة الثالثة فيعطي $(a+b)^3$ [الكرجي (٢)، الورقة ٢٤و] تاركاً إلى كتابه، "البديع"، توسيع $(a-b)^3$ و $(a+b)^4$ [أنبوبا، ١٩٦٤ ص. ٣٣-٣٤]، وإلى الكتاب المفقود سابق الذكر (الذي أشار إليه السموأل) توسيع $(a+b)^n$، بكلّ عموميّته.

يُدخِل الكرجي ضرب كثيرات الحدود، بدءاً من ضرب ذوات الحدّ الواحد (التي يسمّيها "الأعداد المفرَدة")، ثمّ بضرب ذي الحد الواحد بكثيرة حدود أو بعكسها، وصولاً إلى ضرب كثيرتي حدود بشكل عام. ويعطي القواعد الحسابيّة التي تمكّنه من مثل ذلك الضرب مثل "قاعدة الإشارَتين"[١٣] وقاعدة الاشتراك المختلط ($ax^n.\,bx^m = ab.x^{m+n}$). ويلفت الانتباه إلى أنّه يتوقّف في ضرب كثيرتي حدود p و q عند الحالة التي لا تتجاوز درجة أي منهما الثالثة، وذلك، كما يقول، لأنّ القارئ الذي فهم ما سبق من شرحه يصبح قادراً على معرفة ضرب كثيرتي حدود من

---

[١٣] إشارة الجمعٍ، وهي أيضاً إشارة الإيجاب بالنسبة إلى الأعداد الإيجاب (التي نشير إليها في عصرنا بـ "+") وإشارة الطرح وهي أيضاً إشارة السلب لأعداد ("–"): "ضرب الزائد في الزائد زائد، والناقص في الزائد ناقص، والناقص في الناقص زائد، ...".

أيّ درجة كانتا[١٤]. ثمّ يقوم بضرب التعابير الجبريّة التي تحتوي كثيرات حدود وكسور كثيرات الحدود[١٥] عن طريق تقديم العديد من الأمثلة على ذلك.

بعد ذلك يحدّد الكرجي عمليّة القسمة على أنّها "عكس" عمليّة الضرب. ثمّ يعطي قواعد الحساب العائدة لقسمة ذوات الحدّ الواحد ويقول إنّ قسمة كثيرات الحدود بذوات الحد الواحد ممكنة، بينما لا يمكن قِسمة ذي الحد الواحد بذي الحدّين، ولكنّه يقول أيضاً إنّ بإمكاننا، في كلّ حال، التعبير عن "كميّة ما يخرج" من النوع الأخير من القسمة، باللفظ. ثمّ يذكّر بأنّ القوى x^n وعكوسها (الـ $\frac{1}{x^n}$)، تؤلّفان متتاليتين لانهائيّتين تقع إحداهما من إحدى جهتي الواحد، وتقع الثانية من الجهة الأخرى وأنّ الـ $\frac{1}{x^n}$ بإمكانها أن تكون < 1.[١٦] وينهي الفقرة المتعلّقة بالقسمة بإعطاء القاعدة التالية:

$$\frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)} = \frac{a.c}{b}.$$

[١٤] "ولم أتجاوز في أمثلة الضرب حدّ المكعب لأنّك قيما تعمله من المسائل المعروفة، المألوفة، المتداولة، تستغني عن ضرب ما يتجاوز هذا الحدّ. فإن احتجت إلى ضرب شيء كثير من هذا الجنس، أحسنت عمله، بمعرفة ما ذكرتُه" [الكرجي (٢) الورقة ١١و].

[١٥] مثل $\left(20+\frac{5x^2}{x+2}\right).\left(\frac{10}{x}+3x+2\right)$ [الكرجي (٢) الورقة ١١و-١١ظ].

[١٦] "قدعرفت ضرب كلّ عدد مفرد في كلّ عدد مفرَد، فالقسمة عكس بيان ذلك فيما يمكن أن يُقسَم. ألا ترى أنّ الأموال إذا قسمتها على الأشياء خرج أشياء وإذا قسمت الأشياء على العدد خرج أشياء ... وكلّ شيء إذا ما قُسِم عل جنسه كان ما يخرج من ذلك عدداً، كقسمة الأموال على الأموال ... وإذا قسمت غير ذلك على شيء ليس من جنسه فإنّ الخارج من الفسمة هو الذي إذا ضربته في المقسوم عليه يعود المقسوم. ولا يمكن أن يُقسم جنس على مقدار يشتمل على جنسين، فإذا أردت أن تعبّر عن كميّة ما يخرج من القسمة، قلت كذا مقسوم على كذا ... إعلم أنّ الواحد كما يخرج في التضعيف إلى حدّ الشيء والمال والكعب وغير ذلك كذلك يخرج في حدّ التجزئة على حدّ جزء الشيء، وجزء المال وجزء الكعب ثمّ في الطرفين جميعاً إلى ما لا نهاية. وليس بواجب أن يكون جزء الشيء أقلّ من الواحد ..." [الكرجي (٢) الورقة ١٣و].

وفيما يتعلّق بالنسبة، يخلط الكرجي "في هذا الموضع" (بحسب تعبيره، أي في الجبر) بين مفهومي النسبة والقسمة، فهو يكتب: "واعلم أنّ نسبة كلّ مقدار إلى مقدار آخر هو شيء إذا ضُرِب في المنسوب إليه عاد المنسوب" ($(a:b).b=a$)، "وهذا الحكم هو ما تقدّم ذكره في باب النسبة، لأنّ القسمة والنسبة في هذا الموضع سواء ...". و"كلّ ما جاز في المقسوم جاز في المنسوب ..." [الكرجي (٢)، الورقة ١٥و–١٥ظ].

ثمّ يحدّد في فقرة تالية (باب "استخراج الجذور") مفهوم الجذر (التربيعي) لعبارة كثيرة الحدود، استناداً إلى نموذج الجذر التربيعي للعدد. ويقول إنّ قوّة من مرتبة فرديّة لا جذر لها معطياً العديد من الأمثلة على ذلك. ويقول أن بالإمكان استخراج الجذر التربيعي لكثيرات الحدود ذات الثلاثة أو الخمسة أو السبعة حدود (التي تكون مربّعات تامّة) ويقدّم طريقة عامّة لمثل ذلك الاستخراج، يبنيها على مثالين عن $\sqrt{p}$، حيث $p=x^2+4x+4$ و $p=x^4+4x^3+10x^2+12x+$. نشير إلى أنّه في هذه الفقرة يُرجِع ثلاث مرّات إلى كتاب له يسمّيه "كتاب الكفاية"، يقول إنّه كتاب في الحساب يعالج فيه مسألة الجذور التربيعية للأعداد.

بعد ذلك يعطي الكرجي قاعدتي جمع وطرح كثيرات الحدود بالشكل الأكثر عموميّة: "فإذا قيل اجمع بين جملتين يكون كلّ واحدة منها من جنس واحد أو من جنسين أو من أجناس، الباب في ذلك أن تضيف كلّ جنس إلى جنسه، ... فإن كان في أحد الجانبين شيء لا يوجد في الجانب الآخر ما يكون من جنسه، تركته على حاله، ... فإن كان في أحد الجانبين استثناء ولم يوجد في الجانب الآخر شيء

من جنسه، تركته على حاله، وإن وجدت ما يكون من جنسه جبرته بمثله من المقدار المجانس له، ... إذا أردت أن تُلقي جملة من جنس أو من جنسين أو من أجناس، من جملة أخرى، ألقيت كلّ مقدار ممّا يجانسه، فإن لم يكن في المسقط منه مايكون من جنس المسقط، استثنيته منه، ...". ولكي يشرح قاعدتي الجمع والطرح المذكورتين، يعطي أمثلة تغطّي الحالات جميعها [الكرجي (٢)، الورقات ١٧و-١٩ظ].

وفي فقرة تالية، يعطي الكرجي، معتمداً على نماذج عدديّة، قواعد حسابيّة على الجذور من المراتب ٢ و ٣ و٤ (يسمّي الجذر من المرتبة ٢ (أي التربيعي) "الجذر"، ومن المرتبة ٣ "ضلع كعب" ومن المرتبة ٤ "ضلع مال مال"). وتكتب تلك القواعد عصريّاً على الشكل التالي:

$$\sqrt{a}.\sqrt{b}=\sqrt{ab} \text{ ، } \sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{ab} \text{ ، } \sqrt[4]{a}.\sqrt[4]{b}=\sqrt[4]{ab}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}} \text{ ، } \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}=\sqrt[3]{\frac{a}{b}} \text{ ، } \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{b}}=\sqrt[4]{\frac{a}{b}} \text{ ، } a.\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{a^3 b} \text{ ، } \frac{\sqrt[3]{a}}{b}=\sqrt[3]{\frac{a}{b^3}} \text{ .}$$

وفي نهاية هذه الفقرة يتحدّث بسرعة عن نسبة جذر تربيعي إلى آخر: "فإن قيل كم جذر أربعة من جذر تسعة فاقسم <أربعة> على تسعة وخذ جذره وعلى هذا القياس جميع ما لم نذكره من هذا الجنس" [الكرجي (٢)، الورقة ٢١ظ]. نلاحظ إذن أنّ الكرجي يخلط هنا أيضاً بين مفهومَي النسبة والقسمة[١٧]؛ ونتيجة لهذا الخلط يعتبر النسبة كعدد (عندما يكون المنسوب والمنسوب إليه متجانسين). وعلى حدّ علمنا كان الكرجي أوّل رياضي يقوم بهذا الخلط الصريح الذي يؤدّي إلى تطوير مهمّ لنظريّة النسبة كما أدخلها أقليدس (حوالي ٣٠٠ ق. م.).

[١٧] وقد رأينا أن الكرجي قام بهذا الخلط بين النسبة والقسمة، في الفقرة السابقة التي خصّصها للنسبة.

وفيما يتعلّق بجمع وطرح الجذور التربيعيّة والتكعيبيّة للتعابير الجبريّة، يعتمد الكرجي على صيَغ توسيع كلٍّ من $(a+b)^2$ و $(a-b)^2$ و $(a+b)^3$ و $(a-b)^3$، ليعطي القواعد التالية:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}\ ،\quad \sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{a+b+3\sqrt[3]{a^2b}+3\sqrt[3]{ab^2}}\ ،$$

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}\ ،\quad \sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{a-b-3\sqrt[3]{a^2b}+3\sqrt[3]{ab^2}}\ .$$

وفي فقرتين تاليتين، يعطي الكرجي، مستخدماً أمثلة عدديّة، الصيغ التي تحسب مجاميع عدد من المتتاليات العدديّة: ($\sum_{i=1}^{10} i$ ، $\sum_{i=1}^{20} 3+4(i-1)$ ، $\sum_{i=1}^{10} i^2$ ، $\sum_{i=1}^{10} i.(i+1)$ ، $\sum_{i=1}^{8} i.(i+1).(i+2)$)، ويستنتج المجموع الأخير من العلاقة التالية: $(n-1).n.(n+1)=n^3-n$ ، حيث يشير n إلى عدد صحيح.

ومن ثمّ ينتقل إلى فقرة يعطي فيها متطابقات جبريّة من أجل أن يستخدمها لاحقاً في حلّ معادلات الدرجة الثانية. من تلك المتطابقات ما يمكننا كتابته بشكل عصري كما يلي:

$$(١)\quad \frac{1}{2}\left(\frac{x^2-y^2}{x-y}+x-y\right)=x\ ،\qquad \frac{1}{2}\left(\frac{x^2-y^2}{x-y}-(x-y)\right)=y$$ ،[١٨]

$$x.y\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)=x^2+y^2\ ،\qquad x.y\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)=x^2-y^2\ ،$$

[١٨] عُرِفت هذه العلاقة تاريخيّاً تحت اسم "المساواة المثناة" ("*l'égalité double*"). ولكنّ الكرجي يسمّيها هنا "المساواة" فحسب، ثمّ يعود لاحقاً ويسمّيها باسمها التقليدي.

(٢) $\frac{b^2}{4} = \left(\frac{b}{2} - x\right)^2 + x.(b-x)$ ، (٣) $\left(\frac{b}{2} + x\right)^2 = \frac{b^2}{4} + x.(b+x)$ ،[١٩]

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 .$$

ويخصّص الكرجي الفقرة التي تلت، ذات العنوان "ذكر المسائل الست"، لحلّ معادلات الدرجة الثانية [الكرجي (٢)، الورقات ٣٥-٥١]، ويبدأها بشرح "موضوع الجبر والمقابلة" ومعنى هاتين الكلمتين. ثمّ يعتمِد التصنيف الذي قدّمه الخوارزمي للمعادلات المذكورة[٢٠]. ويبرّر حلول المعادلات ثنائيّة الحدود مستخدماً القسمة والنسبة. وخلافاً لما فعل أبو كامل، لم يقدّم تبريراً هندسيّاً لخوارزميّة حل المعادلة من الصنف $ax^2 = bx$.

وفيما يتعلّق بالمعادلات الثلاثيّة الحدود، بأصنافها الثلاثة، يتصرّف الكرجي إلى حدّ ما، كما تصرّف سلفه أبو كامل. فكما عند هذا الأخير، تعدّدت عنده التبريرات الهندسيّة لخوارزميّات الحلول. وقد ارتكز في هذه التبريرات، كما عند تبريرات سلفه، على تساوي المساحات المستطيلة وعلى الرجوع إلى الكتاب الثاني من "أصول"

[١٩] العلاقتان (٢) و(٣) هما على التوالي صيغتان أو ترجمتان جبريّتان للقضيّتين II.5 وII.6 من "أصول" أقليدس، ويقدّمهما الكرجي على الشكل التالي:

(٢): "واعلم أنّ كلّ عدد يُقسم بنصفين ثمّ بقسمين مختلفين فإنّ ضرب أحد القسمين المختلقين في الآخر مع مربّع الفضل بين أحد هذين القسمين وبين نصف العدد، هو مثل نصف العدد في نفسه".

(٣): "واعلم أنّ كلّ عدد يُقسم بنصفين ثمّ تزيد فيه زيادة فإنّ الذي يرتفع من ضرب العدد كلّه مع الزيادة في الزيادة مع مربّع نصف العدد مساوٍ لمربّع نصف العدد مع الزيادة" [الكرجي (٢)،الورقة ٣٤و-٣٤ظ].

[٢٠] مع فارق غير ذي أهميّة هو أنّ الأصناف ١، و٢، و٣ (من المعادلات ثنائيّة الحدود)، عنده هي، على التوالي الأصناف ٣، و١، و٢ عند الخوارزمي.

أقليدس. وقدّم طريقة أبي كامل نفسها لاستخراج x^2 دون المرور بـ x، مستخدماً الأشكال والتمثيلات الهندسيّة نفسها التي لا تحترم التجانس (حيث يمثّل في الشكل الهندسي نفسه الـ x^2 بمربعات وأيضاً بقطع من خطوط مستقيمة). إلاّ أنّه يضيف في حلّ المعادلات ثلاثيّة الحدود طريقتين أصيلتين لم يسبقه إليهما أحد. يطبّق في الطريقة الأولى بشكل منهجي القضيّتين II. 5 و II. 6 من "الأصول"، وذلك دون أن يستعين بتمثيلات هندسيّة تستخدم المساحات. فنراه على سبيل المثال يحلّ المعادلة (من الصنف الخامس) التالية: $x^2+bx=c$ (حيث $b=10,\ c=39$) بطريقة يمكن التعبير عنها بلغة عصريّة كما يلي:

لدينا: $x^2+bx=c \Leftrightarrow x(b+x)=c$؛ ولكن، استناداً إلى II. 6 (أي إلى العلاقة (٣) أعلاه)، لدينا $x(b+x)+\frac{b^2}{4}=\left(\frac{b}{2}+x\right)^2$، فيكون: $c+\frac{b^2}{4}=\left(\frac{b}{2}+x\right)^2$، والعلاقة الأخيرة تعطينا x. والحلّ بهذه الطريقة هو في الواقع حلّ جبري يرتكز إلى الترجمة الجبريّة لقضايا أقليدس (الهندسيّة).

طريقة الحلّ الثانية (وهي ليست في الواقع سوى تهذيب للطريقة الأولى) هي طريقة الحلّ الجبريّة نفسها التي نستخدمها في عصرنا، وقد أدخلها الكرجي لأوّل مرّة في التاريخ. أعطى ذلك الرياضي صيغة أولى من هذه الطريقة في هذا الفصل من كتابه "الفخري"، وسمّاها "طريق ديوفنطس" أو أيضاً "نهج ديوفنطس"[٢١]. (ونذكّر بأنّ

[٢١] راجع مقدمّة الفقرة ٢-٢، من الفصل الثالث وأيضاً الفقرة ٢-٢ وملحوظاتها، من الفصل الثاني من كتابنا [فارس، ٢٠١٧]، حيث نشرح أيضاً ما الذي دعا الكرجي لربط طريقته هذه باسم ديوفنطس، رغم أنّ هذا الأخير لم يعالج أبداً مسألة المعادلات التربيعيّة ثلاثيّة الحدود.

الكرجي خصّص رسالة مستقلّة لعرض طريقة الحلّ الجبري لمعادلات الدرجة الثانية)[٢٢].

وفي نهاية هذا الفصل (أو الفقرة)، يدلّ الكرجي على طريقة حلّ معادلات من درجات أعلى من الثانية تعود كلّها في النتيجة إلى معادلات من الدرجة الثانية (حيث تتوالى الحدود كالتالي $(ax^{m+2}, bx^{m+1}, cx^{m})$ أو (ax^{2m}, bx^{m}, c).

في الفصلين الأخيرين (الرابع عشر والخامس عشر) من الكتاب، يعطي الكرجي مقدّمات يستخدمها في حلّ مجموعة التمارين التي يحويها القسم الثاني من الكتاب. في الفصل الرابع عشر ذي العنوان "ذكر الاستقراء" يرمي الكاتب إلى إعطاء الأساس النظري للحلّ بالأعداد المنطقة للمعادلات بمجهول x من الشكل $ax^2 + b.x + c = u^2$، (أي إيجاد جميع قيم x بحيث يكون $ax^2 + b.x + c$ عدداً مربّعاً). وفي الفصل الخامس عشر يبحث الكرجي عن عكوس المقادير غير المنطقة من الشكل $a \pm \sqrt{b}$ حيث يكون a وb عددين مُنطَقين موجبين، ويفعل ذلك، على ما يبدو، لاستخدام نتائج حساباته في حلّ المعادلات ذات المعاملات غير المنطقة في التمارين التي يعطيها في القسم الثاني من الكتاب.

يحتوي القسم الثاني من كتاب "الفخري" مجموعة ضخمة من التمارين: ٢٥٤ تمريناً. يقسم الكرجي هذا القسم إلى خمس "طبقات" ويعبّر عن نيّته في التدرّج فيها من الأسهل إلى الأصعب؛ لذلك نراه لا يتبع في وضع لائحة هذه التمارين ترتيباً معيّناً (إن بحسب درجات المعادلات أو بحسب كونها محدّدة أو غير محدّدة). ويقدّم

[٢٢] أنظر [الكرجي (١)]، في لائحة المراجع.

فرانتز وبكيه تحليلاً مفصّلاً لهذه التمارين كما يعيد ترتيبها مع ترجمة لها بلغة جبريّة عصريّة [Woepcke, 1835, pp. 9-24 et pp. 75-137]. ويلاحظ أنّ هذا القسم يحتوي "أكثر من ستّين مسألة جبريّة غير محدّدة، غير تلك التي اقتبسها الكرجي من ديوفنطس، ... وأنّ هذه المسائل هي بمعظمها من الدرجات العالية التي تصل إلى التاسعة، بينما لم يأخذ الكاتب (الكرجي) من ديوفنطس سوى مسائل من الدرجة الثانية" [Woepcke, 1835, p. 5]. نشير هنا إلى أنّ ف. وبكيه لم يكن على علم بجبر أبي كامل. ويبرهن ر. راشد أن الكتاب الجبري لهذا الأخير كان في متناول الكرجي، ويعطي لائحة بـ ٥٣ مسألة أخذها هذا الأخير من أبي كامل، بينها ٢٠ مسألة غير محدّدة [Rashed, 2012, pp. 12-13].

٢-٢. "البديع".

نُذكِّر بأنّ الباحث عادل أنبوبا سبق أن ألّف كتاباً حقّق فيه نصّ "البديع" وقدّم موجزاً عن هذا الكتاب، مصحوباً بكتابة بلغة رياضيّة حديثة لمعظم القضايا التي حواها، مع شرح وتعليق رياضيّ وتاريخي. ورغم أهميّة هذا الموجز واحتلاله لمساحة لا بأس بها من كتاب أنبوبا، [Anbouba, 1964, pp. 33-50]، يبقى مكثّفاً بحيث أنّه قراءته لا تُغني عن قراءة نص "البديع". وسنكتفي، في هذه الفقرة، بالتصفّح السريع لكتاب الكَرجي هذا.

كتاب "البديع" هو على المستوى النظري أرقى من كتاب "الفخري". وهو يعتمد على الجبر المقدّم في "الفخري"، وعلى علم الحساب المعروف في عصره (خاصّة ذلك الذي تقدّمه الكتب ٧، و٨، و٩ من "الأصول")، ليطوِّر أبحاثاً حول أسئلة

تنتمي إلى مجالات رياضيّة متنوّعة: علم الحساب، الحساب الجبري، نظريّة المقادير غير المنطَقة، والتحليل غير المحدّد.

وهو لا يعيد إدخال التحديدات وقواعد الحساب الجبري الأساسيّة المدخلة في "الفخري" إلاّ باختصار، معتبراً أنّها معروفة، ولا يعالج نظريّة المعادلات بحدّ ذاتها؛ ويترجم جبريّاً عدّة قضايا من "الأصول" وتغيب عنه تماماً الاستدلالات والتمثيلات والأشكال الهندسيّة، ممّا يدلّ بوضوح على طابعه الحسابي. ويعبّر الكَرجي نفسه، في مقدّمة الكتاب، عن طابعه هذا؛ ففي حديثه عن مسألة "إخراج المجهولات من المعلومات" يقول إنّ التوصّل إلى ذلك <يتمّ> بثلاثة أشياء أحدها أصول الجبر والمقابلة ..."؛ وحول "صناعة" الجبر والمقابلة يكتب: "وأنا أرجو أن أكشف مستورها وأُوضِح مُشكلَها ... بعد أن أقدّم على ذلك أصولاً حسابيّة التقطت بعضها من كتاب أقليدس من الأصول وبرهنت على ما بَعُدَ منها ببراهين واضحة على طريق الحساب ... وينبغي لمن نظر في هذا الكتاب أن يُحكِم هذه الأصول بعد معرفة ما ذكرنا في الفخري من أركان صناعة الجبر والمقابلة" [أنبوبا، ١٩٦٤، ص. ٧].

يقسم كتاب "البديع" إلى ثلاثة أقسام.

٢-٢-أ. القسم الأوّل من "البديع".

في القسم الأوّل من "البديع"، ذي العنوان "في الأصول" [أنبوبا، ١٩٦٤، ص. ٨-٤٣]، يبدأ الكرجي بإدخال التحديدات الأساسيّة لعلم الحساب كما وردت في الكتاب السابع من "أصول" أقليدس، ثمّ يعالج مسائل في علم الحساب، مستنداً بشكل رئيسي إلى هذا الكتاب وإلى الكتاب الثامن، معيداً العديد من قضاياهما، دون

براهينها أحياناً. بعد ذلك يعالج مسائل تتعلّق ببعض المتتاليات العدديّة (بناء متتاليتي الأعداد المربّعة والمكعبة، بواسطة الجمع)[٢٣] ويعطي صيغاً جبريّة لعدد من قضايا الكتاب الثاني من "الأصول" ويصحبها غالباً ببراهين تستخدم الحسابات الجبريّة. بعد تلك القضايا التي تُستَخدَم في حلّ المعادلات الجبريّة، يعطي العلاقة المعروفة باسم "المساواة المثنّاة" التي سبق أن استخدمها ديوفنطس (أنظر الفقرة السابقة ٢-١). من ثمّ يعيد معظم قضايا الكتاب التاسع من "الأصول" (الحسابيّ). بعد ذلك يقدّم مقطعاً حول الأعداد المتحابّة معتمداً، على ما يبدو، على رسالة في هذا المجال لثابت بن قرّة، دون الرجوع بشكل صريح إلى هذا الأخير.

ما تبقّى من هذا القسم (وهو من حيث الحجم أكبر من ثلثه) [أنبوبا، ١٩٦٤، ص. ٢٩-٤٣]، هو فصل طويل يعاج نظريّة المقادير غير المنطقة، والحسابات على هذه المقادير التي يعبّر عنها الكرجي بواسطة الأعداد.

في هذا الفصل، يُذَكِّر الكرجي بتصنيف الخطوط "المفردة" و"ذوات الحدّين" و"المنفصلات"، الذي قدّمه أقليدس في الكتاب العاشر من "الأصول"، وينقل بلغة الجبر والأعداد، تحديدات هذا الكتاب الهندسي، والعديد من قضاياه. وينبّه إلى عدم كفاية نظريّة أقليدس في الخطوط غير المنطَقة[٢٤]، ويُدخِل أمثلة عن مقادير غير منطقة من أصناف أخرى: يبدأ بالمقادير المفرَدة (الـ $\sqrt[n]{a}$، غير المنطقة) ويشير إلى لانهائيّة

[٢٣] ، على سبيل المثال: ١، ١+٣، ١+٣+٥، ١+٣+٥+٧، ... هي متتالية الأعداد المربّعة. أمّ متتالية الأعداد المكعبة فهي: ١، ٣+٥، ٧+٩+١١، ١٣+١٥+١٧+١٩، ٢١+٢٣+٢٥+٢٧+٢٩، ....

[٢٤] فهو يكتب: "وأنا أُريك نقل هذه الألقاب* إلى العدد وأزيد فيها لأنّه لا يُكتَفى بها في الحساب" [أنبوبا، ١٩٦٤، ص. ٢٩].
*يقصد الكرجي بـ"الألقاب"، أصناف المقادير غير المنطقة التي أدخلها أقليدس.

أصناف المقادير غير المنطقة من هذه الأشكال، وإلى أنّ بالإمكان بواسطة هذه الأصناف من المقادير المفردة بناء أصناف لانهائيّة من المقادير غير المنطقة المركّبة، كثيرة الحدود.

وفي مجرى حسابه لـ $\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$، في الحالات $n = 2,3,4$، حيث يكون $\sqrt[n]{a}$ و $\sqrt[n]{b}$ متشاركان بالطول، يعطي الكرجي الصيغتين العائدتين إلى توسيع $(a \pm b)^n$ في الحالتين $n = 3,4$، قبل أن يعطي الصيغة العامّة التالية:

$$\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{b}.\left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}} \pm 1\right).$$

ثمّ يعطي عدداً من قواعد الحساب (من ضرب وقسمة وجمع وطرح) على مقادير غير منطقة، كثيرة الحدود، من أصناف مختلفة، ويواجه خلال ذلك العديد من الحالات الخاصّة التي تتعلّق بمشاركة أو عدم مشاركة حدود المقادير تلك فيما بينها. فهو، على سبيل المثال، يعطي القاعدة الحسابيّة العائدة لـ $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b} \pm \sqrt{c}}$، ولكنّه لا ينجح بإعطاء تلك التي تعود إلى حساب $\frac{a}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}$. ويلفت عادل أنبوبا النظر إلى أنّ خَلَف الكرجي، السموأل، تمكّن من حلّ صعوبة ذلك الحساب [Anbouba, 1964, p. 37].

بعد ذلك يقدّم الكَرَجي صيغاً جبريّة لقضايا الكتاب العاشر التي تتعلّق بالجذور التربيعيّة للخطوط "ذات الحدّين" ولـ "المنفصلات"، وهي القضايا ٥٤–٥٩، و٩١–٩٦، من الكتاب العاشر. (نُذَكّر هنا بأنّ "الجذر التربيعي" مفهوم غريب عن رياضيّات الكتاب العاشر؛ وأنّ ما يقول الكرجي إنّه جذر خطّ ما، هو عند أقليدس

"الخطّ القويّ" على المستطيل الذي يحدّه هذا الخط من جهة، والخط المأخوذ كوِحدة، من الجهة الأخرى). بعد ذلك يقدّم الكرجي طرائق جبريّة لحساب الجذور التربيعيّة لمقادير غير منطقة، من تلك الأصناف ومن أصناف أخرى[٢٥].

٢-٢-ب. القسم الثاني.

يحمل القسم الثاني من "البديع" عنوان "القول على المجهولات" [أنبوبا، ١٩٦٤، ص. ٤٦-٦١]، وهو مخصّص، بشكل ظاهر، لاستخراج الجذر التربيعي لكثيرات الحدود (من لامحدّد واحد) التي تكون مربّعات تامّة وتكون معاملاتها مُنطقة.

يبدأ الكرجي هذا القسم بمقدّمة من شأنها أن تهم كثيراً مؤرخي وفلاسفة العلوم[٢٦]. بعد ذلك يذكّر، باختصار، بالتحديدات الأساسيّة للجبر: "الشي" وقواه (التي يسمّيها "مراتب" الشيء) وعكوس تلك القوى، ويلفت النظر إلى أن تلك التحديدات سبق أن أُعطيت بالتفصيل في كتابه "الفخري".

مفهوم "المراتب" قاد الكرجي إلى إدخال مفهوم "البُعد"[٢٧]، الذي درج استخدامه (بالمعنى نفسه) من بعده وبعد السموأل.

---

[٢٥] يستخدم الكرجي توسيع مربّع كثيرة الحدود ذات الشكل: $(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+...)$، حيث تكون a، وb وc ، ... مقادير منطقة غير مربّعة، ويكون $a>b>c>...$، لكي يحسب الجذر التربيعي لكثيرات الحدود من الشكل $(u+\sqrt{m}+\sqrt{n}+...)$، بالتطابق، أي أنّه يأخذ: $(2\sqrt{ab}=\sqrt{m},\ 2\sqrt{ac}=\sqrt{n},...)$.

[٢٦] راجع الفقرة ٥، أدناه.

[٢٧] بما أنّ قوى X تتوالى ابتداءً من الـ 1 (أنظر فقرة "الفخري" أعلاه)، يكون بُعد (أو مسافة) X^n عن الـ 1، بمفهوم الكرجي، هو العدد n. ويقول الكرجي أيضاً أنّ بُعد X^{2n} عن X^n، مساوٍ لبعد X^n عن الـ 1. وفي اللغة الرياضيّة العربيّة المعاصرة، كلمة "بُعد" (ج. "أبعاد") تقابل كلمة *dimension*، لذا لا بدّ أن يكون هذا المصطلح الرياضي الحالي، المرتبط بمفهوم "القوّة"، عائداً في الأصل إلى ذلك الاستخدام الجبري القديم. على كلّ حال نُشير إلى أنّ عمر الخيّام استخدم كلمة "البُعد" بمفهومنا العصري في كتابه الجبري: (راجع افقرة ٢-٢ من القسم الأوّل من الفصل الخامس من كتابنا [فارس، ٢٠١٧]).

ويلاحِظ الكرجي أنّ استخراج الجذر التربيعي لذوات الحدّ الواحد أو لثلاثيّات الحدود (المربّعة) مسألة بديهيّة، وأنّ ذوات الحدّين ليست أبداً مربّعات تامّة. وبما أنّ مربع أيّ ثلاثيّة حدود يتألّف من خمسة أو من ستّة حدود، يُعطي خوارزميّة لاستخراج جذور كثيرات الحدود من هذين الصنفين (عندما يكون ذلك ممكناً أي عندما تكون كثيرة الحدود المأخوذة مربّعاً تامّاً). الخوارزميّة كما يعلنها الكرجي عامّة، ولا يقلّل من عموميّتها كون الحدّ ذي الدرجة الأقلّ في كثيرات الحدود p التي يأخذها في الأمثلة التوضيحيّة، عدداً (أي كونه من الدرجة صِفر)، ذلك يعني أنّها تُكتَب على الشكل:

$$p = aX^{2m} + a_1X^{m+r} + a_2X^{m+s} + a_3X^{m+t} + a_4X^{m+u} + c \quad (١)$$ ،[٢٨]

وعند ذلك، بحسب الخوارزميّة، يكون جذرها التربيعي من الشكل:

$$q = \sqrt{a}X^{m} + bX^{r} + \sqrt{c} \quad (٢)$$ ،

حيث يكون $b = \dfrac{a_1}{2\sqrt{a}}$ أو أيضاً $b = \dfrac{a_4}{2\sqrt{c}}$ (وهاتان القيمتان $\dfrac{a_1}{2\sqrt{a}}$ و $\dfrac{a_4}{2\sqrt{c}}$ متساويتان عندما يكون p مربّعاً تامّاً). ويبدو من خلال سياق هذه الفقرة من النصّ أنّ هذه الخوارزميّة تعتمد على توسيع مربّع ثلاثيّات الحدود: (نأخذ q من الشكل: $q = AX^{m} + BX^{r} + C$، ونضع $p = q^2$ ، عند ذلك نحصل بواسطة التطابق على: $A = \sqrt{a}$ و $B = \dfrac{a_1}{2\sqrt{a}} = \dfrac{a_4}{2\sqrt{c}}$ و $C = \sqrt{c}$. يُطَبِّق الكرجي هذه الخوارزميّة

[٢٨] عندما يكون الحدّ ذو الدرجة الدنيا من الشكل: cX^{2u}، يكون $\dfrac{p}{X^{2u}}$ من الشكل (١)، وجذره يعطينا جذر p.

على عدّة أمثلة، ويلاحظ أنّها تُطبّق في حالة كثيرات الحدود ذات حدود طرحيّة (أي معاملات سالبة).

بعد ذلك يعطي الكرجي الخوارزميّة بكلّ عموميّتها، أي مهما كان عدد حدود كثيرات الحدود التي ننوي استخراج جذرها. وهذه الخوارزميّة هي امتداد أو توسّع إلى كثيرات الحدود، لخوارزميّة استخراج جذور الأعداد التي كان يعرفها جيّداً معاصرو الكرجي من الحُسّاب والتي ما زلنا نلقّنها حتّى عصرنا لتلامذة المدارس في المرحلة الابتدائيّة[٢٩]. ويقول الكرجي في وصفها: "وهذا الطريق هو الذي يستعمل في استخراج جذور المعلومات بحساب الهند وغيره" [أنبوبا، ١٩٦٤، ص. ٥١].

ولكي يسهّل إجراء تلك الخوارزميّة، يقترح تمثيل أيّة كثيرة حدود:

$$p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_0 X^0$$

بالمتتالية العدديّة المؤلّفة من معاملاتها،

$$a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0$$

ويقترح أن تتوزّع هذه المعاملات على بيوت متحاذية، مع ترك بيت الحدّ الغائب (من حدود $p(X)$) فارغاً. هذا التمثيل هو حدث مهمّ من الناحية التاريخيّة، وهو التمثيل الذي ما زلنا نستخدمه في عصرنا لتحديد كثيرات الحدود وللقيام بالعمليّات الحسابيّة المتعلّقة بها. وعلى حدّ علمنا كان الكرجي أوّل رياضي في التاريخ يُدخله ويستخدمه؛ وقد طوّر خَلَفه، السموأل، ذلك التمثيل واستخدمه على نطاق واسع في حساباته[٣٠].

---

[٢٩] يبدو أنّ أصل هذه الخوارزميّة يعود إلى الرياضيّات الصينيّة من القرن الثاني م.

[٣٠] راجع الفقرة ٣ من الفصل الرابع من كتاب [فارس، ٢٠١٧].

لكي يحسب الكرجي الجذر التربيعي لِ $p(X)$، يقترح تقسيم متتالية معامِلاته إلى شرائح، بدءاً من معامل الحدّ ذي الدرجة الدنيا، a_0، تحوي كلّ منها مُعامِلَيْن، وإجراء العمليّة عليها (وهي مقسّمة إلى شرائح) تماماً كما تجري عمليّة استخراج الجذر التربيعي على متتالية أرقام العدد عند استخراج جذره التربيعي[٣١]. ويوضِح هذه العمليّة بتطبيقها على كثيرة الحدود التالية:

$$p(X)=X^{12}+4X^{11}+10X^{10}+20X^{9}+35X^{8}+56X^{7}+84X^{6}$$
$$+104X^{5}+115X^{4}+116X^{3}+106X^{2}+84X+49,$$

التي يمثّلها بالمتتالية

$$1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 104, 115, 116, 106, 84, 49.$$

ويُلاحِظ أنّه إذا كانت معاملات p كسريّة، يُستحسن أن نحوّلها كلّها إلى مخرج مشترَك يكون مربّعاً تامّاً.

بالرغم من عموميّة هذه الخوارزميّة، من اللافت للنظر أنّ الكرجي لم يطبّقها في حالة كثيرات الحدود التي تحتوي حدوداً طَرحيّة (اي ذات معاملات سالبة)؛ فقدكرّس لمثل كثيرات الحدود هذه فقرة طويلة [أنبوبا، ١٩٦٤، ص. ٥٤–٦١]، بدأها بالتحذير من صعوبة هذه الحالة. قراءة هذه الفقرة صعبة، ويزيد من صعوبتها تعدّد الحالات الخاصّة التي يأخذها الكرجي والتي تتعلّق بعدد حدود كثيرات الحدود التي

---

[٣١] لاستخراج الجذور التربيعيّة للأعداد، يُحيل الكرجي القارئ إلى كتاب ألّفه، عرّفه على أنّه "كتابنا المصنّف في حساب الهند" (بحسب تعبيره)، من دون أن يعطي عنوانه بالضبط. هذا الكتاب هو بالتأكيد الموجود تحت عنوان "كتاب في الحساب الهندي" في لائحة مؤلّفات الكرجي التي أعطاها عادل أنبوبا (الفقرة ١، أعلاه). ويُحتمل أن يكون الكتاب نفسه الذي أورده الكرجي تحت اسم "كتاب "الكفاية"، في كتابه "الفخري" في الفصل المتعلّق باستخراج الجذور [الكرجي (٢) الورقة ١٦و–١٦ظ].

يعالجها. ونظنّ أنّ أحد عوامل تلك الصعوبة التي واجهها الكرجي تكمن في عدم تعامله مع الأعداد المنطَقة السالبة بحدّ ذاتها. وقد استطاع خلفه، السموأل، تجاوز تلك الصعوبة عن طريق استخدامه تلك الأعداد واستفادته من تقنيّة اللوحات وتقنيّة تمثيل كثيرة الحدود بمتتالية معاملاتها[٣٢].

وعند نهاية هذا القسم من الكتاب، يعالج الكرجي باختصار، مسألة الجذور التربيعيّة لبعض التعابير من الشكل $\frac{p(X)}{q(X)}$، حيث تكون p وq كثيرتي حدود.

٢-٢-ج. القسم الثالث.

يحمل القسم الثالث من "البديع" عنوان "المقالة في ذكر الاستقراء" [أنبوبا، ١٩٦٤، ص. ٦٢-٨٤]، وهو مخصّص بشكل أساسي للتحليل غير المحدّد، المنطَق. وهذا القسم هو متابعة لدراسة كثيرات الحدود التي تكون مربّعات، التي بدأها في القسم السابق؛ هذا ما يعبّر عنه الكرجي إذ يكتب في المقدّمة: "وأقول إنّ المقادير[٣٣] المربّعة على ضربين: منها ما يكون مربّعاً وهو في حيّز المجهولات، ويدلّ على ذلك ... مثل مال وجذرين وواحد، الذي جذره شيء وواحد، ... ومنها ما يكون مربّعاً إذا جعلته معلوماً فأمّا إذا كان في حيّز المجهولات فإنّ لفظه لا ينطق بأنّه مربّع. وهذا القسم هو الذي نريد أن نتكلّم على كيفيّة طلبه وطلب جذره". يتلخّص مشروعه هنا

[٣٢] راجع الفقرة ٣ من الفصل الرابع من كتاب [فارس، ٢٠١٧].

[٣٣] من سياق النص، يقصد الكرجي بكلمة مقدار، "كثيرة حدود".

إذن بأخذ كثيرة حدود $p = p(x)$، وبالبحث عن قِيَم عدديّة منطقة لـx تجعل من $p(x)$ عدداً منطقاً مربّعاً. وبتعبير آخر، يتلخصّ المشروع بحلّ المعادلات الجبريّة التي تكتب على الشكل $p(x) = u^2$، حيث يكون p تعبيراً كثيرَ الحدود ويكون u عدداً منطقاً كيفما اتُّفق. وفي الواقع يعالج هذا القسم من الكتاب، بشكل رئيسي، أنظمة معادلات غير محدّدة، من ذلك الشكل.

يبدأ الكرجي بمعالجة الحالة التي يكون فيها p ذا حدٍّ واحد[٣٤]، أي بالمعادلات ذات الشكل $ax^m = u^2$، حيث $a \in \mathbb{Q}^*_+$. تأتي بعدها الحالة التي يكون فيها p ذا حدّين، من الشكل $p = ax^{2m} + bx^{2m+1}$ أو الشكل $p = ax^{2m} + bx^{2m-1}$. بعد ذلك يعالج الحالة: $p = ax^{2m} + bx^{2m-2}$، حيث يكون أحد المعاملين a أو b. مربّعاً، ثمّ ينتقل إلى الحالة التي يكون فيها p من الشكل: $p = ax^2 + bx + c$ (وعموماً من الشكل $p = ax^{2m} + bx^{2m-1} + cx^{2m-2}$) حيث يكون أحد المعامِلَيْن a أو c مربّعاً. الحلّ الذي يُقدّمه يتمّ عن طريق معادلة التعابير كثيرة الحدود المذكورة بتعابير كثيرة حدود مربّعة مناسبة للتخلّص من ax^{2m} أو من $bx^{2m\pm1}$.[٣٥] بعد ذلك يحل بطريقة "التجربة والخطأ"، معادلات من الشكل: $ax^2 + b = u^2$، حيث $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$، ومن الشكل $ax^2 + bx + c = u^2$، حيث لا يكون أيّ من a أو b أو c مربّعاً.

---

[٣٤] "ما يكون من مرتبة واحدة"، بحسب تعبيره.

[٣٥] هو مثلاً، يحل $4x^2 + 10 = u^2$، بوضع: $4x^2 + 10 = 4x^2 + 4x + 1$، و $x^2 - 10 = u^2$ بوضع $x^2 - 10 = x^2 - 4x + 4$، …

بقيّة القسم الثالث من الكتاب تتألّف من فصل طويل يحمل عنوان "باب ذكر سؤالات السائل" ومن فصلين قصيرين آخرين. تعالج هذه الفصول مسائل عمليّة يمكن ترجمتها إلى أنظمة معادلات من مجهول واحد أو عدّة مجاهيل، بعضها محدَّد، وبعضها غير محدَّد. حلول هذه الأنظمة تستخدم طرائق متنوّعة مستخدمة في الفقرات السابقة (وتستخدم أحياناً "المساواة المثناة")، وبعض هذه المسائل موجود في "حساب" ديوفنطس. نذكر من بين المسائل غير المحدّدة، الأنظمة التالية:

$$\begin{cases} x+4=u^2 \\ x+5=v^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} 4-x=u^2 \\ 5-x=v^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x^2+5=u^2 \\ x^2-5=v^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x^2+10=u^2 \\ x^2-8=v^2 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x^3+6x^2=u^2 \\ x^3-3x^2=v^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x^2+y=u^2 \\ y^2+x=v^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x^2+x=u^2 \\ x^2-x=v^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x+2x^2=u^2 \\ y-3y^2=v^2 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x^4+ax^3=u^2 \\ x^4-bx^3=v^2 \end{cases}, \ldots, \quad x^2+y^2+z^2+x+y+z=u^2, \ldots,$$

حيث $u \in \mathbb{Q},\ v \in \mathbb{Q},\ a \in \mathbb{Q},\ b \in \mathbb{Q}$.

٣. ملحوظة.

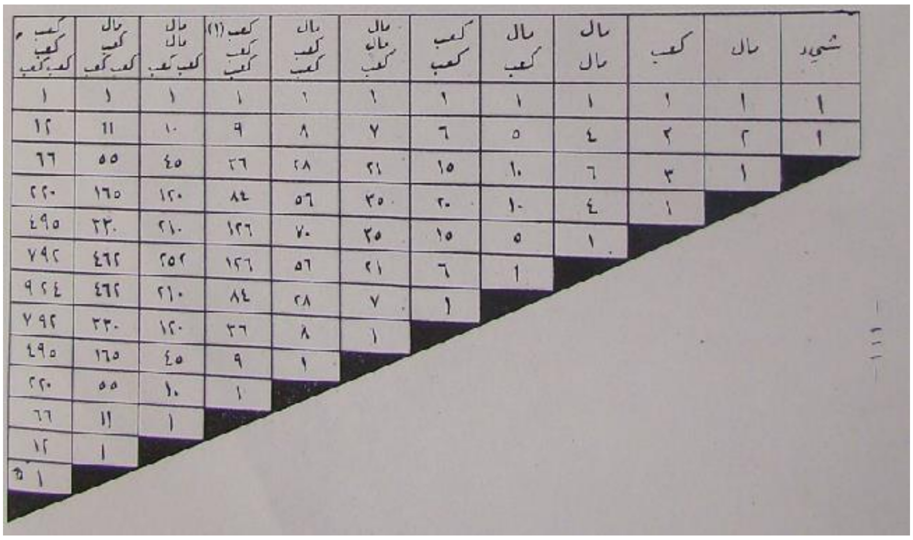
بالإضافة إلى النتائج الجديدة العائدة إلى عدّة فصول رياضيّة، منها خاصّة فصل الحساب الجبري ونظريّة المقادير غير المنطقة، نجد في "البديع" مقاطع من شأنها أن تهمّ مؤرّخي وفلاسفة الرياضيّات، وأن تساعد على تشكيل فكرة واضحة (إلى حدّ ما) عن مستوى تطوّر علم الجبر (في مجراه الحسابي) في القرن الحادي عشر م. نذكر، في هذا الخصوص، مقدّمة الكتاب، وخاصّة مقدّمة القسم الثاني منه، ذي العنوان: "القول على المجهولات". نجد في المقدّمة الأخيرة هذه تأمّلات للكرجي حول طبيعة

"المعلوم" وطبيعة "المجهول"، وطبيعة كلّ من علمَيّ الجبر والهندسة. ثمّ يتأمّل الكرجي في التشابه بين هاتين المادّتين الرياضيّتين وبين دور "الشيء" في الجبر ودور "الخط" في الهندسة. بعد ذلك يذكر الفرق الجوهري بين كلّ من هذين العلمين وبين علم الحساب، باعتبار أنّ "الواحد" الذي هو أساس علم الحساب، هو غير "الشيء" (أساس الجبر) وغير "الخطّ" (أساس الهندسة). فهو يكتب: "ليس الواحد في العدد مثل الشيء في حدّه والخطّ في حدّه، لأنّ الواحد وُجِد معلوماً لا يخرج عن حدّه، والشيء والخطّ هما معلومان بوضعك لهما كذلك". ولا ينسى الكرجي ذكر الفوارق بين الهندسة والجبر، والمتعلّقة بأساس كلّ منهما، إذ يكتب بهذا الخصوص: "والفرق بينهما أنّ أصل ذلك (أي أصل الهندسة) الخط، وأصل هذا (أي أصل الجبر) الشيء، ولذلك شكلٌ يُدرَك بالرؤية، ولهذا صورةٌ معلومة بالفطنة متصوّرة في النفس ..." [أنبوبا، ١٩٦٤، ص. ٤٦-٤٧]. في الفقرة الأخيرة من هذه الجملة، يعبّر الكرجي عن واقِع غياب رمزيّة جبريّة كافية في عصره، وبالتالي عن إجراء الحسابات الجبريّة بشكل ذهنيّ بحت. نُذَكِّر بأنّ الترميز الرياضي العصري بدأ في القرن السادس عشر[٣٦].

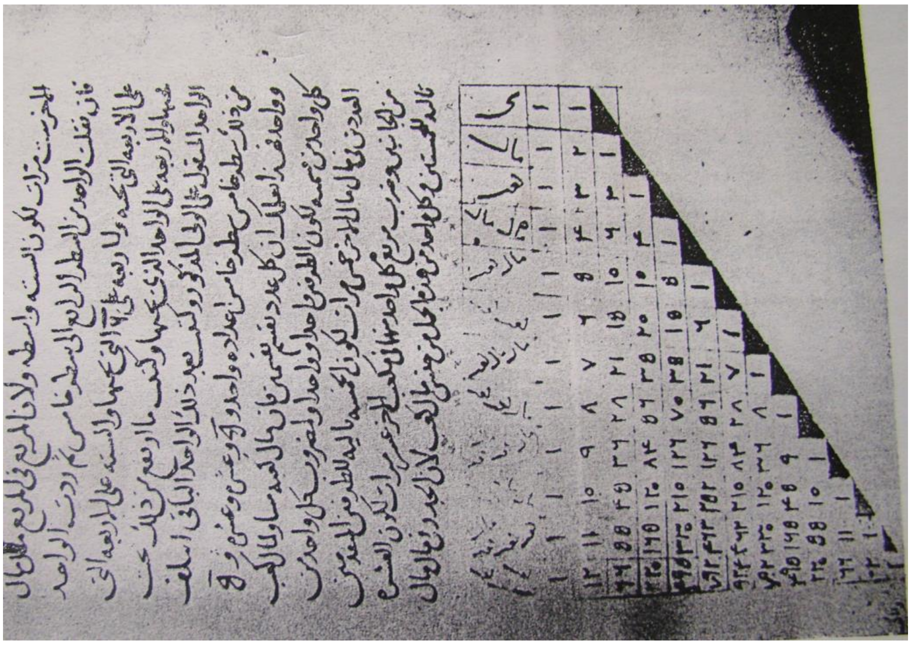
ممّا ورد في الفقرات السابقة يتبيّن أنّ الجبر بلغ مع الكرجي مرحلة النضوج وأصبح مؤهّلاً لأن يحتلّ مكانه كمادّة رياضيّة قائمة بذاتها، إلى جانب المادّتين اللتين كانتا في أساس وجوده: الهندسة وعلم الحساب.

---

[٣٦] راجع، على سبيل المثال [Ver Eecke, 1926, pp. XX-XXI].



كعب كعب كعب كعب	مال مال كعب كعب كعب	مال مال كعب كعب	كعب (١) كعب كعب	مال كعب كعب	مال مال كعب	كعب كعب	مال كعب	مال مال	كعب	مال	شيء
١	١	١	١	١	١	١	١	١	١	١	١
١٢	١١	١٠	٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١
٦٦	٥٥	٤٥	٣٦	٢٨	٢١	١٥	١٠	٦	٣	١	
٢٢٠	١٦٥	١٢٠	٨٤	٥٦	٣٥	٢٠	١٠	٤	١		
٤٩٥	٣٣٠	٢١٠	١٢٦	٧٠	٣٥	١٥	٥	١			
٧٩٢	٤٦٢	٢٥٢	١٢٦	٥٦	٢١	٦	١				
٩٢٤	٤٦٢	٢١٠	٨٤	٢٨	٧	١					
٧٩٢	٣٣٠	١٢٠	٣٦	٨	١						
٤٩٥	١٦٥	٤٥	٩	١							
٢٢٠	٥٥	١٠	١								
٦٦	١١	١									
١٢	١										
١											



Le triangle arithmétique d'al-Karajī. Les deux photos sont prises du livre de S. Ahmad et R. Rashed [p. 111].

Ouvrages cites

***Dans ce qui suit, les références qui sont citées en français et en arabe, ont été traduites et publiées en cette dernière langue. La liste des ouvrages cités est extraite de celle du livre : [Farès, N. 2017] .**

المراجع المذكورة

***في ما يلي، المراجع المذكورة بالعربيّة وبلغة أخرى، جرت ترجمتها إلى العربيّة ومتوفّرة باللغتين. واللائحة التالية مقتطعة من لائحة مراجع الكتاب [فارس، ن. ٢٠١٧].**

أحمد (صلاح) وراشد (رشدي). ١٩٧٢. "الباهر في الجبر للسموأل"، تحقيق وتحليل، جامعة دمشق، دمشق، (سلسلة الكتب العلميّة ١٠).

Ahmad, S. et Rashed, R., 1972. *Al-Bāhir en algèbre d'As-Samaw'al. Édition, notes et introduction*. Univ. de Damas, Damas.

Anbouba, A. 1964. L'algèbre - Al-Badīʿ d'al-Karagī. Édition, introduction, et notes. Publications de l'Université Libanaise, Beyrouth.

أنبوبا، ع. ١٩٦٤. "البديع في الحساب" للكرجي. منشورات الجامعة اللبنانيّة، بيروت.

Anbouba, A. 1959. « Al-Karagī ». *Ad-Dirāsāt al-Adabiyyat*. n° 2, 3. Publications de l'Université Libanaise, Beyrouth. pp. 73-… (en arabe).

أنبوبا ع. ١٩٦١. "مختارات من كتاب الباهر في علم الحساب". مجلّة المشرق. المكتبة الكاثوليكيّة. بيروت. ص. ٧١– ...

Chalhoub, S. 1986. Al-Kāfī fi'l hisāb d'Abū Bakr Muhamed ben al-Hasan al-*Karajī*. Université d'Alep.

شلهوب، س. ١٩٨٦. الكافي في الحساب لأبي بكر محمّد بن الحسن الكرجي. معهد التراث العلمي العربي – جامعة حلب.

Farès, N. 2017. *Naissance et développement de l'algèbre dans la tradition mathématique arabe*. Dār al-Fārābī, Beyrouth.

فارس، ن. ٢٠١٧. "الجبر- ولادته وتطوّره في التقليد الرياضي العربي"، دار الفارابي، بيروت.

Al-Karajī, Abū-bakr, (1). (S. D). Causes du calcul de l'algèbre et d'al-muqābala et sa démonstration. Extraits résumés d'un livre d'abū bakr al-Karajī. Bodlean 1 Library 2. Ms Seld Super 22 (3).

الكرجي، (١)."علل حساب الجبر والمقابلة والبرهان عليه، مختصرات من كتاب لأبي بكر الكرجي" (مخطوط، أوكسفورد السابق، بدون تاريخ).

Al-Karajī, Abū-Bakr (2). (Manuscrit. S. D). *Al-Fakhri*. Köprülü, Istanbul, 950, 1.

الكرجي، (٢). "الفخري من كلام زين الدين أبو بكر محمّد الحسن الحاسب الكرجي". (مخطوط، اسطنبول السابق، بدون تاريخ).

Rashed, R. 1984 (1). *Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*. Les Belles Lettres, Paris.

راشد، ر. ١٩٨٩. "تاريخ الرياضيات العربية – بين الجبر والحساب" مركز دراسات الوحدة العربيّة -بيروت. نقله إلى العربيّة د. حسين زين الدين عن صيغته الفرنسيّة.

Rashed, R. 2012. *Abu Kāmil: Algèbre et analyse diophantienne. Édition, traduction et commentaire.* De Gruyter, Walter, Inc.

Ver Eecke, P. 1926. *Diophante d'Alexandrie : les six livres d'arithmétique et le livre des nombres polygones*. Blanchard, Paris.

Wœpcke, F. 1853. *Extrait du Fakhri, par Abou Bekr Mohammed Ben al Haçan al Karkhi*. Bibliothèque Impériale, Paris.